集合和映射

欧阳光中 编





[illegible]出版社

内 容 提 要

本书通过日常生活中常见的实例引入近代数学的一个分支——集合论——的基本思想，并介绍了集合的运算、等价关系、商集、顺序关系、映射、集合的势等许多重要概念。本书可供高中学生和中小学教师阅读和参考。

目　录

§1　集合的概念和集合的运算……1
从百货商店说起……1
集合的概念……2
集合的运算：和，交，差……6
余集，和交关系……14
集合的直积……16
习题……20
§2　等价关系，商集……23
怎样分类……23
等价关系……24
等价类……28
商集……29
习题……31
§3　顺序关系，半序集和全序集……33
顺序关系，半序集和全序集……33
再谈什么叫做关系……35
习题……37
§4　映射……38
怎样把函数的概念加以拓广……38
映射的概念……39
复合映射……45
逆映射……48
由映射产生的等价关系……50
习题……53
§5　集合的势，可列集和不可列集……

谁多谁少？……55
集合的势……56
可列集和可列势……57
不可列集……61
再谈集合的和与交……67
习题……69
附录：罗素悖理……70
理发师的头谁剃？……71
罗素悖理……71
习题解答……73

§1 集合的概念和集合的运算

从百货商店说起

走进百货商店，各种货物琳琅满目。

当我们读小学的时候就已经知道，在这里不论是买和卖，都少不了整数和小数以及它们的四则运算。换句话说，在买卖中我们要研究的数学对象是整数和小数，这些数之间的运算是加减乘除。然而，在这百货商店里难道只用到这一种数学吗？不，还有另一种数学对象和它们的运算将展现在我们的面前。

现在，从百货商店的进货说起。如果第一批进的货是帽子、皮鞋、热水瓶、闹钟共计 4 个品种，第二批进的货是收音机、皮鞋、尼龙袜、茶杯、闹钟共计 5 个品种，要问一共进了多少品种的货。能不能回答一共进了 $4+5=9$ 种呢？显然不能，因为在这两批货中皮鞋和闹钟是重复的，扣掉重复，只能回答一共进了 7 种。这就告诉我们，不能用普通的算术来解这道题，而必须用另一种办法才行。

我们用 A_1 表示第一批进的货，用 A_2 表示第二批进的货，即：

$A_1=$｛帽子，皮鞋，热水瓶，闹钟｝，

$A_2=$｛收音机，皮鞋，尼龙袜，茶杯，闹钟｝。

把这两批进货的品种合并起来，我们把合并起来的货物品种记为B，就得到

$B=A_1$ 和 A_2 合并

$=${帽子，皮鞋，热水瓶，闹钟，收音机，尼龙袜，茶杯}。

一共7个品种！

还要进第三批货，我们把它记为A_3，进这批货有两个要求：一是它的品种必须在A_2中，二是它的品种不能在A_1中，问A_3里面有多少品种？也不能冒然回答A_3里共有$5-4=1$个品种，而应该这样做：

$A_3=$从A_2中减去A_1中也有的品种

$=${收音机，尼龙袜，茶杯}。

一共3个品种。

再进第四批货，把它记为A_4，要求它的品种既在A_1中，同时又在A_2中，也就是

$A_4=A_1$和A_2的共同品种

$=${皮鞋，闹钟}。

在这些问题中，我们所处理的数学对象已经不是数，而是A_1和A_2，它们是由一些东西所组成的。在A_1和A_2之间有一些有用的"运算"，这些运算也不是通常的加减乘除，而是"合并"、"减去"、"共同"。这样，一个新的数学领域立即展现在我们的面前。

集合的概念

什么叫集合，就人们的日常生活经验而言，这几乎是不言自明的概念，它是指某些指定的"东西"集在一起就成为集

合*。例如前面所说的 A_1, A_2, B, A_3, A_4 都是集合。又如全体中国人也是一个集合，所有大于 0 并且小于或等于 2 的实数同样构成一个集合，这个集合就是左开右闭的区间 $(0,2]$。在集合论中，我们往往用下面的记号来表示这个左开右闭的区间：

$$(0,2]=\{x \mid 0<x\leqslant 2\}。$$

右边括号的含意是：它表示一个集合，这个集合是由满足条件"$0<x\leqslant 2$"的一切 x 所组成的。我们把条件写在括号内右方，把 x 写在括号内左方，当中用一竖把它们分开(也可以用":"把它们分开，写为 $\{x:0<x\leqslant 2\}$)。

一般说来，设集合 $A=\{x \mid \cdots\}$，这表示 A 是由满足条件"$\cdots$"的那些 x 所组成的，我们称这种 x 是集合 A 的**元素**。显然，"x 是 A 的元素"和"x 属于 A"是一回事，我们用记号 $x\in A$ 来表示 x 属于 A，其中记号"$\in$"读作：属于。我们又用记号"$\notin$"表示"不属于"，例如"$x\notin B$"就是"x 不属于 B"。

下面，我们举出集合的一些例子，并熟习一下刚才引进的那些记号。

例 1 设 $A=\{x \mid x^2-1=0\}$，它是由满足方程 $x^2-1=0$ 的一切 x 所组成的集合，解方程即得

$$A=\{x \mid x^2-1=0\}=\{-1,1\}。$$

它的元素只有两个：-1 和 1。由于它的元素的个数是有限的，我们就说它是一个**有限集**。

例 2 设 Z 是整数集(即由全体整数所组成的集合)，

---

* 究竟什么是集合，这是一个很不容易回答的问题．参见附录：罗素悖理。

那么

$$E=\{n|\frac{n}{2}\in Z\}$$

也是一个集合。条件"$\frac{n}{2}\in Z$"表示$\frac{n}{2}$属于整数集，即$\frac{n}{2}$是整数，可见集合E是由满足条件"$\frac{n}{2}$是整数"的那些n所组成的。很明显，这种n必须是偶数，即

$$E=\{n|\frac{n}{2}\in Z\}=\{0,\pm2,\pm4,\pm6,\cdots\}。$$

它不是有限集，我们就说它是**无限集**。

例 3 设R是实数集（即由全体实数所组成的集合）。那么

$$S=\{x|x\in R, x^2+1=0\}$$

就是由方程$x^2+1=0$的属于实数的根所组成。由于这个方程没有实根，所以集合S是空的。我们把空的集记为ϕ，读作：**空集**。于是

$$S=\{x|x\in R, x^2+1=0\}=\phi。$$

要注意：$\{x|x^2=0\}=\{0\}$不是空集，因为它是由一个元素0所组成，所以并不空！

例 4 设$M=\{x|x^2-4\geqslant0, x^2-4x<0\}$。它是由同时满足两个条件"$x^2-4\geqslant0$"和"$x^2-4x<0$"的$x$所组成的集合，换句话说，这些$x$必须满足：

$$\begin{cases}x^2-4\geqslant0,\\x^2-4x<0。\end{cases}$$

通过解联立不等式，我们得出：

$$M=\{x|x^2-4\geqslant 0, x^2-4x<0\}=[2,4)。$$

它是一个区间，当然是无限集。

例 5 设 $S=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1, x>0\}$。它是由平面上的点$(x,y)$所组成的集合，这些点必须同时满足 $x^2+y^2\leqslant 1$ 和 $x>0$。由解析几何知道，它是右半个单位圆(图 1)，不包含线段 MN，但包含半圆周。

象本例中由平面(或者空间)的点组成的集合，通常叫做**点集**。属于集合的点就是这个集合的元素。

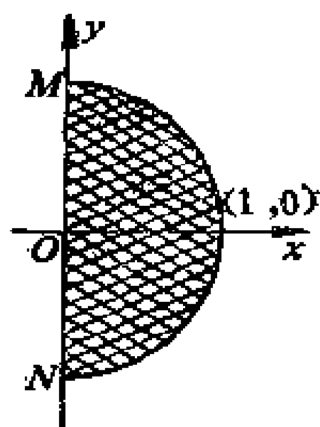


图 1

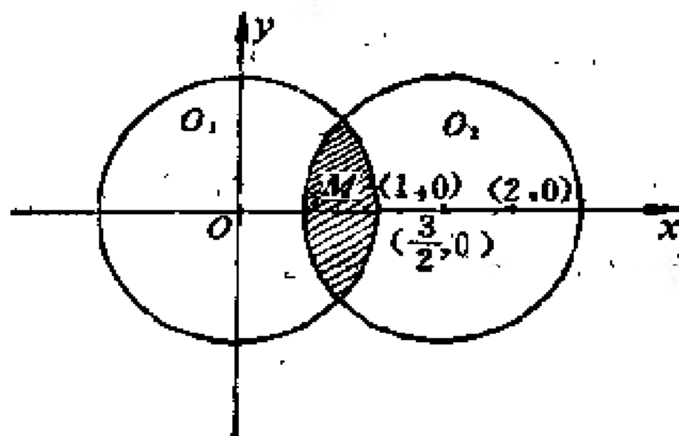


图 2

例 6 设$M=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1, \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2\leqslant 1\}$。它是由具有下列性质的点$(x,y)$所组成的集合，这些点既要满足"$x^2+y^2\leqslant 1$"，又要满足"$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2\leqslant 1$"。由解析几何知道，所有满足"$x^2+y^2\leqslant 1$"的点组成一个以原点为圆心的单位圆(即图 2 中的 O_1)，所有满足"$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2\leqslant 1$" 的点也组成一个单位圆，但它的圆心在$\left(\frac{3}{2},0\right)$(即图 2 中的 O_2)。而

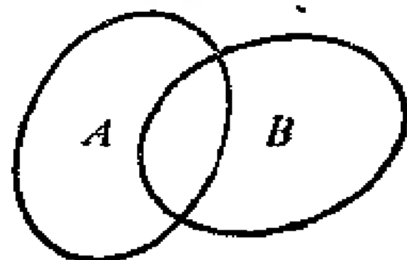
M 中的点既在 O_1 中又在 O_2 中，它的图形如图 2 所示。

最后还要注意一点：设集合 $A=\{1, 2, 3\}$。它由三个元素 1, 2, 3 组成，我们也可以把 A 写成 $A=\{2, 1, 3\}$ 或者 $A=\{3, 1, 2\}$ 等等。这就是说，当我们只是讨论集合是由哪些元素组成的时候，这些元素的书写次序是无关紧要的。

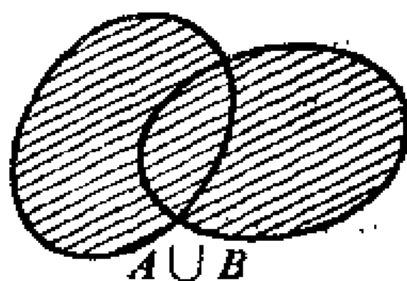
集合的运算：和，交，差

对一个一般的集合，我们常常用一个图形来表示它，就象例 5 和例 6 中那样。但由于所讨论的集合是一般的，没有对它作什么具体的规定，我们就可以随便画一个图形来表示它，这样做的好处是比较直观，容易考虑一些问题。现在，我们先借用图形，给出集合的和(并)、交、差三种运算的直观概念。

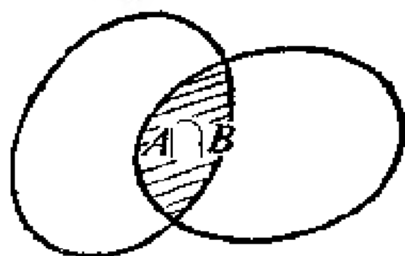
在图 3(*a*)中，我们画出了两个集合 A 和 B。



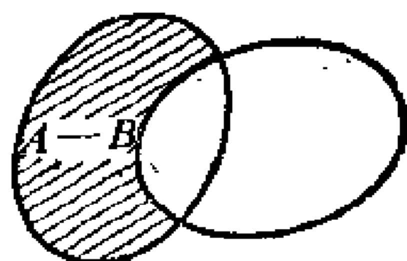
(*a*)



(*b*)



(*c*)



(*d*)

图 3

(1) 把这两个集合并起来，就得到图 3(b)，我们把它叫做集合 A 与 B 的和（也叫做集合 A 与 B 的并），记为 $A\cup B$。或者说，把集合 A 和集合 B 内的所有元素统统并起来，就得到 $A\cup B$。

(2) 图 3(c)中 A 与 B 的公共部分叫做集合 A 与 B 的交，记为 $A\cap B$。或者说，$A\cap B$ 的元素既在 A 中又在 B 中。

(3) 图 3(d) 画出了 A 与 B 的差，即在 A 中挖去 B，记为 $A-B$。或者说，$A-B$ 中元素在 A 中，但不在 B 中。

上面所给出的只是和、交、差的直观概念，还不是数学上的定义。在集合论中，它们的定义是：**设 A、B 是两个集合，**

和(并)： $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$

$=\{x|$ 在 A、B 中至少有一个含有 $x\}$；

交： $A\cap B=\{x|x\in A, x\in B\}$，

如果 $A\cap B=\phi$(空集)，就说 A 与 B 不相交；

差： $A-B=\{x|x\in A, x\notin B\}$。

例 7 设 $A=(-1,1)$，$B=[0,2]$。

那么，$A\cup B=(-1,2]$，

$A\cap B=[0,1)$，

$A-B=(-1,0)$，

$B-A=[1,2]$。

例 8 设 $A=\{*,\triangle,\bigcirc,☆,\times\}$，$B=\{☆,\triangle,*,\square\}$。

那么，$A\cup B=\{*,\triangle,\bigcirc,☆,\times,\square\}$，

$A\cap B=\{*,\triangle,☆\}$，

$A-B=\{\bigcirc,\times\}$，

$B-A=\{\square\}$。

又设 $C=\{*,\times\}$，那么 $C-A=\phi$。

例 9　设 $A=\{x|x^2+x-6<0\}$，$B=\{x|x^2-2x-3\leqslant 0\}$。通过解不等式，我们有

$$A=(-3,2),\ \ B=[-1,3]。$$

这时

$$A\cap B=(-3,2)\cap[-1,3]=[-1,2)。$$

由集合的交的定义知道，$A\cap B$ 正是联立不等式

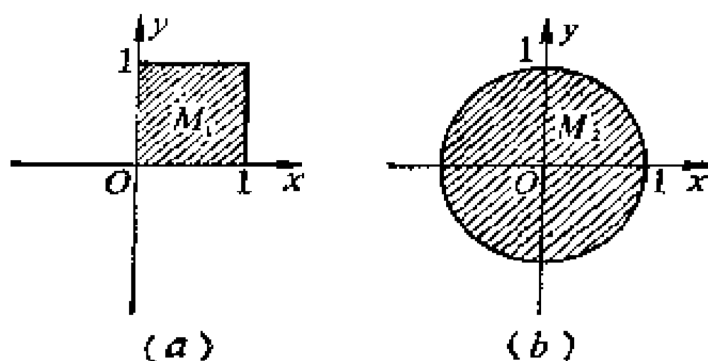
$$\begin{cases}x^2+x-6<0,\\x^2-2x-3\leqslant 0\end{cases}$$

的解。

例 10　设 $M_1=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$，

$$M_2=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}。$$

它们的图形画在图 4(*a*)和(*b*)中。图 4(*c*)中画出了 $M_1\cup M_2$，



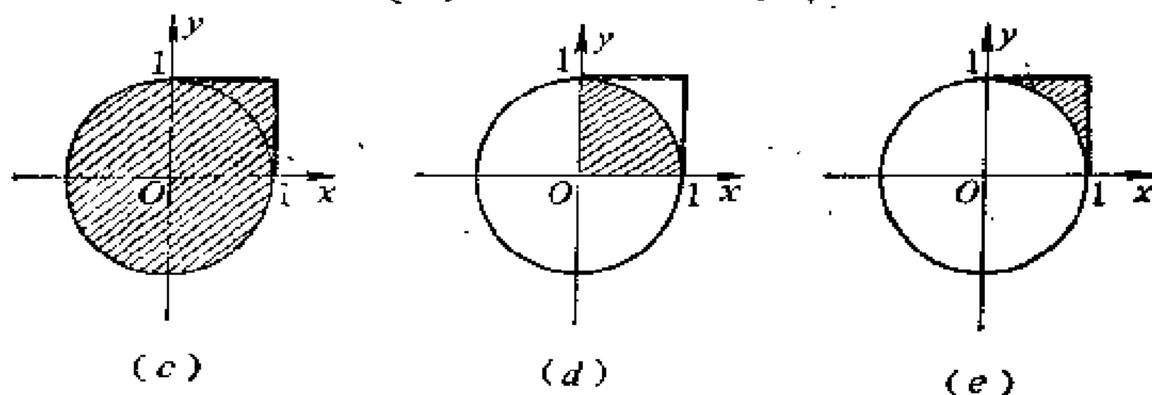


图　4

图 4(*d*)中画出了 $M_1 \cap M_2$，图 4(*e*) 中画出了 $M_1 - M_2$。

在普通的算术中，我们有不等号"≤"和等号"="。同样，在集合论中，我们要引进所谓"**包含**"和"**相等**"的概念。

(1) 我们先给出什么叫做一个集合包含另一个集合。

设两个集合 A 和 B。如果 A 中的每一个元素都在 B 中，我们就说**集合 B 包含集合 A**，或者说 A 含在 B 内，并用 $A \subset B$ (或 $B \supset A$) 来表示这件事。用前面学过的记号写出来就是：

若 $x \in A$，必有 $x \in B$，就说 $A \subset B$。

这时我们也说 A 是 B 的**子集**。例如全体中国人就是全体亚洲人的一个子集。又如集合{*，○}是集合{×，*，+，○}的一个子集。再如整数集 Z 是有理数集 Q 的子集，而 Q 是实数集 R 的子集，即 $Z \subset Q \subset R$。

(2) 我们再给出什么叫做两个集合相等。

设两个集合 A 和 B，如果 A 中的每一个元素都在 B 中，而 B 中的每一个元素又都在 A 中，我们就说这**两个集合相等**，并记为 $A = B$。

由"包含"和"相等"的概念，立刻知道下面几件显而易见的事实。

(i) $A \subset A$，即任何集合 A 包含它自身。

但我们往往感兴趣的是"真正的子集"，即：$A \subset B$ 而 $A \neq B$(图 5)。我们就说 A 是 B 的真子集，这意味着 A 真正含在 B 内。例如有理数集 Q 就是实数集 R 的一个真子集。如果 A 是 B 的真子集，这

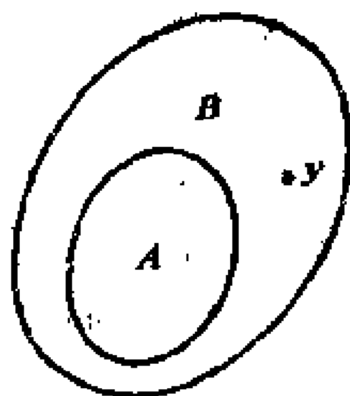


图 5

表明：$A\subset B$，同时在 B 中至少有一个元素 y，$y\notin A$（图 5）。

（ii）任何两个集合 A 和 B，总有 $A\subset A\cup B$。

这是因为 $A\cup B$ 比 A 扩大了，当然就有 $A\subset A\cup B$。这一事实在后面的一些论证中常常要用到。

（iii）如果两个集合 A 和 B，既有 $A\subset B$，又有 $A\supset B$，这就表示 $A=B$。

在集合论中，当证明两个集合 A 和 B 相等时，我们常常先证明 $A\subset B$，再证明 $A\supset B$，这样就证明了 $A=B$。

在通常的加法和乘法中，有一些重要的法则，如交换律、结合律和分配律。与此类似，在集合的和与交中也有相仿的法则。设 A,B,C 都是集合。

交换律　$\boldsymbol{A\cup B=B\cup A}$，$\boldsymbol{A\cap B=B\cap A}$。

结合律　$\boldsymbol{A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C}$，

$\boldsymbol{A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C}$。

分配律　$\boldsymbol{A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)}$，

$\boldsymbol{A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)}$。

同时，显然有

$$\boldsymbol{A\cup A=A,\quad A\cap A=A,\quad A-A=\phi}。$$

这些法则都不难利用图形加以验证。例如，我们来验证分配律中的第一个式子 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，图 6($a$)中画出了 A，B，C 三个集合，图 6(b)画出了 $B\cap C$，图 6(c)中画出了 $A\cup(B\cap C)$；图 6(d)和(e)分别画出了 $A\cup B$ 和 $A\cup C$，再作它们的交便得到图 6(c)。这样就验证完了。

这仅仅是直观的验证，还不是数学上的证明。下面，我们用标准的集合论的方法来证明 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

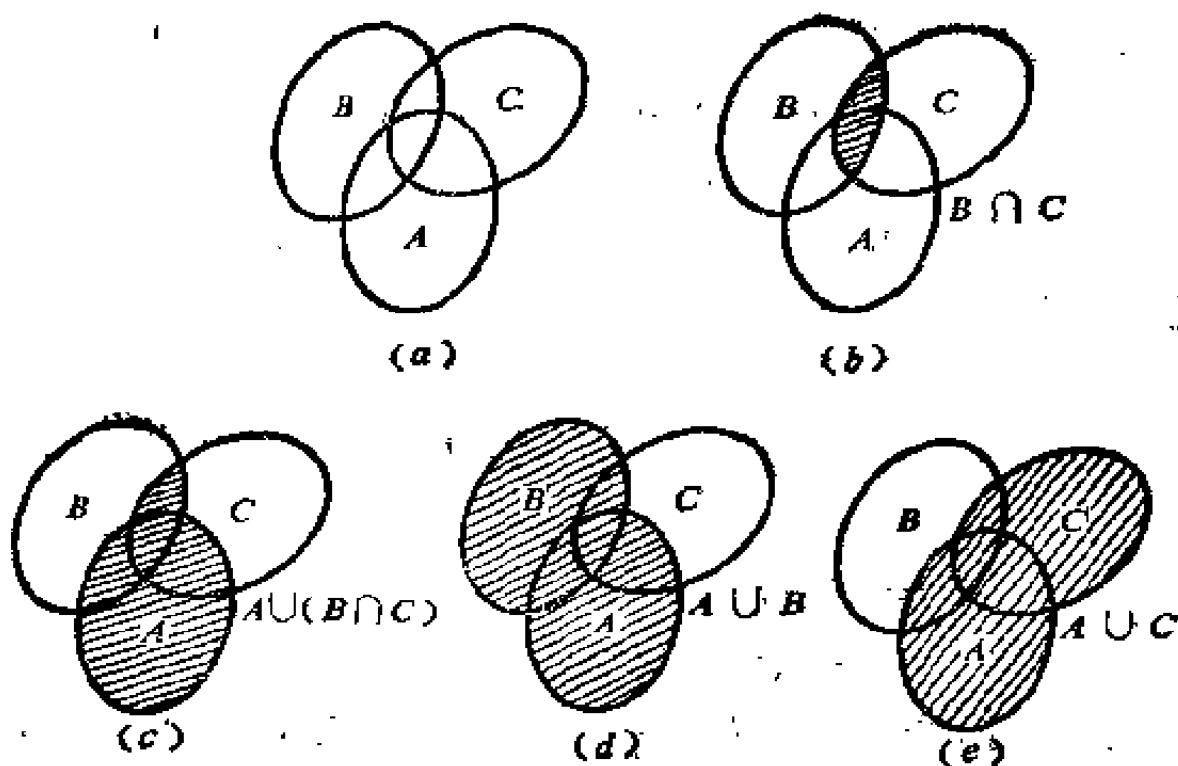


图 6

证明：(1) 我们先证明

$$A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C)。$$

设 $x\in A\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in B\cap C$*。

这时有两种可能性，也仅有两种可能性：

一种。 $x\in A\Rightarrow x\in A\cup B,\ x\in A\cup C$

$$\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)。$$

另一种。$x\in B\cap C\Rightarrow x\in B,\ x\in C$

$$\Rightarrow x\in A\cup B,\ x\in A\cup C$$

$$\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)。$$

---

* 记号“⇒”表示“推得”，例如“$ab=ac$，$a\neq0\Rightarrow b=c$”，这句话表示“由 $ab=ac$ 和 $a\neq0$ 推得 $b=c$”。

这就证明了，如果 $x\in A\cup(B\cap C)$，必有 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

因此 $$A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C)。$$

(2) 再证明上式的左端$\supset$右端。

若 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)\Rightarrow x\in A\cup B$，$x\in A\cup C$。

这时也有(且仅有)两种可能性：

一种。$x\in A\Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$

另一种。$x\notin A$，由于 $x\in A\cup B, x\in A\cup C$

$\Rightarrow x\in B$，$x\in C$

$\Rightarrow x\in B\cap C$

$\Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$。

这就证明了，若 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，必有 $x\in A\cup(B\cap C)$。因此

$$A\cup(B\cap C)\supset(A\cup B)\cap(A\cup C)。$$

将(1)和(2)综合起来，便证明了结论。

例 11 设 $A=\{x|x^2-16<0\}$，$B=\{x|x^2-4x+3\geqslant 0\}$。

解不等式得

$$A=(-4,4), B=(-\infty,1]\cup[3,+\infty),$$

这时

$$\begin{aligned}A\cap B&=(-4,4)\cap((-\infty,1]\cup[3,+\infty))\\&=((-4,4)\cap(-\infty,1])\cup((-4,4)\cap[3,+\infty))\\&=(-4,1]\cup[3,4)。\end{aligned}$$

这正是联立不等式

$$\begin{cases}x^2-4<0,\\x^2-2x-3\geqslant 0\end{cases}$$

的解。

至于分配律的另一个式子，建议读者用图形加以验证，或用集合论的方法加以论证。

现在，我们把两个集合的和与交推广到许多集合的和与交。设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个集合，我们用记号 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 表示这 n 个集合之和，用记号 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 表示它们的交，其确切的含义是：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$$= \{x \mid \text{至少存在某个 } j, 1 \leqslant j \leqslant n, \text{使得 } x \in A_j\}$$

$$= \{x \mid \text{在 } A_1, A_2, \cdots, A_n \text{ 中至少有一个集合含有 } x\}。$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

$$= \{x \mid \text{对一切 } i = 1, 2, \cdots, n, x \in A_i\}$$

$$= \{x \mid x \text{ 属于一切 } A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}。$$

例 12 设 A, B, C, D 都是集合，证明：

$A \cap (B \cup C \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D)$。

证明：利用结合律和分配律，有

$$A \cap (B \cup C \cup D) = A \cap (B \cup (C \cup D))$$

$$= (A \cap B) \cup (A \cap (C \cup D))$$

$$= (A \cap B) \cup ((A \cap C) \cup (A \cap D))$$

$$= (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D)。$$

例 13 设 $A=\{0,1,2,3,4\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{1,4\}$，$D=\{2,3,4\}$，求$(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D)$。

利用例 12 中的公式：

$$
\begin{aligned}
&(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D)\\
&=A\cap(B\cup C\cup D)\\
&=\{0,1,2,3,4\}\cap\{1,2,3,4\}\\
&=\{1,2,3,4\}。
\end{aligned}
$$

分配律中的两个公式，都可以加以推广（参见例 12）。设 $A, B_1, B_2, \cdots, B_n$ 都是集合，那么

$$A\cup(B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_n)=(A\cup B_1)\cap(A\cup B_2)\cap\cdots\cap(A\cup B_n),$$

$$A\cap(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n)=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\cdots\cup(A\cap B_n)。$$

余集，和交关系

设 S 是一个集合，A 是 S 的一个子集，即 $A\subset S$。作

$$A^c=\{x\mid x\in S, x\notin A\},$$

我们称 A^c 是 **A 在 S 中的余集**（**或补集**），有时也把它记为 $C_S(A)$ 或 $C(A)$（图 7），立即知道 $A^c=S-A$。直观的说，余集 A^c 就是 S 中除掉 A 以后余下来的集。

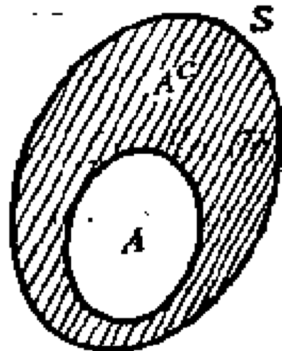


图 7

例 14 设 X 是实数轴，$A=(0,1)$。那么

$$A^c=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)。$$

例 15 设 Z 是整数集，$E=\{n\mid \frac{n}{2}\in Z\}$。

那么

$$E^c = \{全体奇数\}。$$

在集合论及其应用中，有两个重要的公式，叫做和交关系。设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是集合 S 的子集，那么

(1) $$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c。$$

用普通的语言来说就是：和集的余集等于各个余集的交。

(2) $$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c。$$

用普通的语言来说就是：交集的余集等于各个余集的和。

这两个关系式都可以画出图来加以验证。有兴趣的读者不妨自己做一下。这里，我们用集合论的方法对第一个公式加以证明。

求证：$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c。$$

证明：(1)我们先证明上式右端包含左端。

设 $$x \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c \Rightarrow x \in S,\ x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$\Rightarrow x \in S，对所有\ i = 1, 2, \cdots, n,\ x \notin A_i$$

$$\Rightarrow 对所有\ i = 1, 2, \cdots, n,\ x \in A_i^c$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c。$$

这就证明了 $$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c。$$

(2) 再证明上式的左端又包含右端。

设 $x\in\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c\Rightarrow$对一切 $i=1,2,\cdots,n$, $x\in A_i^c$

$\Rightarrow x\in S$, 对一切 $i=1,2,\cdots,n$, $x\notin A_i$

$\Rightarrow x\in S,\quad x\notin\bigcup_{i=1}^{n}A_i$

$\Rightarrow x\in\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)^c$。

这就证明了$\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)^c\supset\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c$。

将(1)和(2)合并起来，便证明了结论。

例 16 设 $X=\{1,2,3,\cdots,10\}$, $A_1=\{2,3\}$, $A_2=\{2,4,6\}$, $A_3=\{3,4,6\}$, $A_4=\{7,8\}$, $A_5=\{1,8,10\}$, A_i^c 是 A_i 在 X 内的余集($i=1,2,3,4,5$)。求 $\bigcap_{i=1}^{5}A_i^c$。

利用和交公式:

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^{5}A_i^c&=\left\{\bigcup_{i=1}^{5}A_i\right\}^c\\&=X-\left\{\bigcup_{i=1}^{5}A_i\right\}\\&=X-\{1,2,3,4,6,7,8,10\}\\&=\{5,9\}。\end{aligned}$$

集合的直积

斗兽棋的棋子有两种颜色：红和蓝，我们设 $A=\{红,蓝\}$，

它是由红，蓝两个元素组成的集合。对每一种颜色，又有象，狮，虎，豹，狼，狗，猫，鼠。我们设$B=\{$象，狮，虎，豹，狼，狗，猫，鼠$\}$，它也是一个集合。斗兽棋的棋子就是由A和B搭配起来的，例如红狮就是由A中的“红”和B中的“狮”搭配起来的，我们把它记为(红，狮)；又如蓝豹就是由A中的“蓝”和B中的“豹”搭配起来的，我们把它记为(蓝，豹)，等等，一共有十六种：

(红，象)，(红，狮)，…，(红，鼠)；

(蓝，象)，(蓝，狮)，…，(蓝，鼠)。

它们既非A中的元素，也非B中的元素，而是由A和B搭配起来的新元素，我们把这些新元素组成的集合记为C，并称C是A和B的直积，记为$C=A\times B$。

一般地，设有两个集合A和B，我们定义**A和B的直积$A\times B$**是

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}。$$

用普通的语言来说就是：在A中取一个元素x，又在B中取一个元素y，把它们搭配起来成为(x,y)。注意，在这个搭配中，x在前，y在后。所有这种(x,y)的全体构成一个集合，这个集合就是$A\times B$。

例 17 设$A=\{0,1\}$，$B=\{a,b,c\}$。那么

$A\times B=\{(0,a),(0,b),(0,c),(1,a),(1,b),(1,c)\}$。

$B\times A=\{(a,0),(b,0),(c,0),(a,1),(b,1),(c,1)\}$。

可见$A\times B\neq B\times A$。

例 18 设$X=\{x\mid 1<x<2\}$，$Y=\{y\mid 1<y<2\}$，那么

$$X\times Y=\{(x,y)\mid 1<x<2, 1<y<2\}。$$

它的图形是一个正方形，但不包含正方形的边框(图 8)。

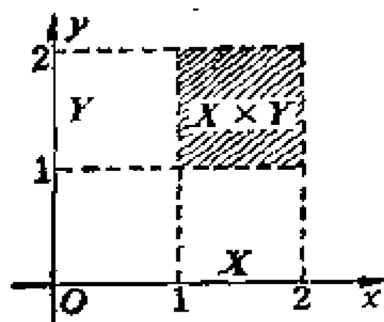


图 8

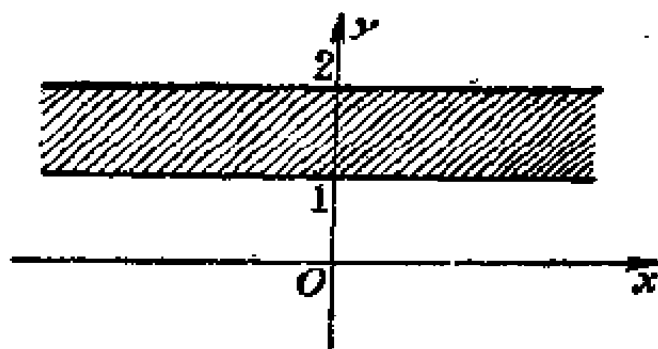


图 9

例 19　设 $X=\{x|-\infty<x<+\infty\}$，$Y=\{y|1\leqslant y\leqslant 2\}$，那么

$$X\times Y=\{(x,y)|-\infty<x<+\infty, 1\leqslant y\leqslant 2\}。$$

它的图形是一条平行于 X 轴的横带子(图 9)，包括上下两条边。

例 20　设 R 是实数集，即 $R=\{x|-\infty<x<+\infty\}$，那么

$$R\times R=\{(x,y)|-\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty\}。$$

它就是整个平面，我们用 R^2 来记它，即 $R^2=R\times R$。这是我们通常所说的二维欧氏空间。

设 A, B, C 都是集合。对于直积，有下面两个分配律公式：

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C),$$

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)。$$

我们只证明第一个式子。

证明：(i)先证明 $A\times(B\cap C)\subset(A\times B)\cap(A\times C)$

设 $\alpha\in A\times(B\cap C)\Rightarrow\alpha=(x,y), x\in A, y\in B\cap C$

$\Rightarrow\alpha=(x,y), x\in A, y\in B, y\in C$

$\Rightarrow\alpha=(x,y)\in A\times B, \alpha=(x,y)\in A\times C$

$\Rightarrow \alpha \in (A\times B)\cap(A\times C)$。

(ii)再证明 $A\times(B\cap C)\supset(A\times B)\cap(A\times C)$。

设 $\alpha\in(A\times B)\cap(A\times C)\Rightarrow \alpha\in A\times B, \alpha\in A\times C$

$\Rightarrow \alpha=(x,y), x\in A, y\in B, y\in C$

$\Rightarrow \alpha=(x,y), x\in A, y\in B\cap C$

$\Rightarrow \alpha\in A\times(B\cap C)$。

由(1)和(2)便证明了结论。

第二个式子的证明请读者自己去完成。

例 21 设$A=\{a,b\}, B=\{1,2,3\}, C=\{2,3,4\}$，我们来验证刚才证明过的式子。

$A\times(B\cap C)=\{a,b\}\times\{2,3\}$

$=\{(a,2),(a,3),(b,2),(b,3)\}$。

$A\times B=\{a,b\}\times\{1,2,3\}$

$=\{(a,1),(a,2,),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$。

$A\times C=\{a,b\}\times\{2,3,4\}$

$=\{(a,2),(a,3),(a,4),(b,2),(b,3),(b,4)\}$。

$(A\times B)\cap(A\times C)=\{(a,2),(a,3),(b,2),(b,3)\}$。

这样便验证了

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)。$$

两个集合的直积可以推广到多个集合上去。设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是n个集合，我们定义

$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$

$=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1\in A_1, x_2\in A_2, \cdots, x_n\in A_n\}$。

例 22 设 $A=\{0,1\}, B=\{a,b\}, C=\{*,\times,\triangle\}$。那么，$A\times B\times C$ 就是由 $(0,a,*)$, $(0,a,\times)$, $(0,a,\triangle)$, $(0,b,*)$, …, $(1,a,*)$, $(1,a,\times)$, …等等元素所组成。

例 23 设 R 是实数集。那么

$$R^3=R\times R\times R=\{(x,y,z)\mid -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty,\ -\infty<z<+\infty\}$$

就是通常的三维欧氏空间。

$$R^n=\underbrace{R\times R\times\cdots\times R}_{n\text{个}}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid -\infty<x_1<\infty,\cdots,\ -\infty<x_n<+\infty\}。$$

就是通常的 n 维欧氏空间。

习　题

1. 指出下面的集合X是由怎样性质的元素所组成的。如果是有限集，写出它的所有元素；如果是无限集，用图形把这个集合表示出来。

(1) 设 Z 是整数集，$X=\{n\mid \frac{n}{5}\in Z,\ |n|\leq 20\}$；

(2) $X=\{x\mid -x^2+8x-12>0\}$；

(3) $X=\{x\mid -x^2+8x-12>0,\ x\in Z\}$，$Z$ 是整数集；

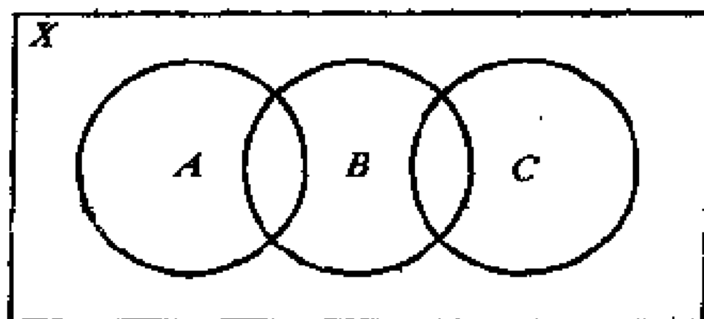
(4) $X=\{x\mid \sin \pi x\leq 0,\ x^2-8x+15>0\}$；

(5) $X=\{x\mid \operatorname{tg} x>0,\ -x^2-\frac{\pi}{2}x>0\}$；

(6) $X=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1,\ -\infty<y<+\infty\}$；

(7) $X=\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2\leq 1,\ y>1\}$。

2. 设集合 X, A, B, C 如图所示，并记 A^c, B^c, C^c 分别是 A, B, C 在X内的余集，用图形画出下列集合：



(1) $A^c \cup C^c$;　　(2) $(A\cap B)\cup C$;

(3) $(A\cap B)^c\cap C$;　　(4) $(A\cap B)\cup B$;

(5) $(A\cap B)-C^c$;　　(6) $B^c\cup C$;

(7) $(A-B)\cup C$;　　(8) $B-(A\cup C)$。

3. 设 $X=\{0,1,2,3,4,5\}$, $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{1,2,3\}$。指出下列式子是否正确(其中记 A^c, B^c 是 A, B 在 X 中的余集):

(1) $0\in A$,　　(2) $\{0\}\in A$,

(3) $\{0\}\subset A$,　　(4) $0\subset A$,

(5) $A\subset B$,　　(6) $B\subset A$,

(7) $\phi\subset A$,　　(8) $A^c\subset B^c$,

(9) $B^c\subset A^c$。

4. 设 $A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 4\}$, $B=\left\{(x,y)\,\middle|\,-\infty<x<+\infty,\ \frac{1}{2}<y<\frac{3}{2}\right\}$。画出

(1) $A\cup B$,　　(2) $A\cap B$,

(3) $A-B$,　　(4) $B-A$。

5. 利用图形说明 $(A\cup B)\cap C\neq A\cup(B\cap C)$。

6. 设 A, B 都是有限集。问:在什么条件下,$A\cup B$ 的元素个数等于 A 的元素个数与 B 的元素个数之和?

7. 写出下列集合的一切真子集:

(1) $A=\{0,1,2,3\}$, (2) $B=\{0\}$。

8. 证明　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

9. 证明　$A\cap(B\cup C\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D)$。

10. 设$A_i \subset X$, $A_i^c = X - A_i$ ($i = 1, 2, \cdots, n$)。证明

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c。$$

11. 设$A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{*, \triangle\}$。写出

$$A \times B \times C,\quad C \times B \times A。$$

12. 设$A = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$, $B = \{y \mid 0 \leqslant y < 1\}$。在平面坐标内画出$A \times B$。

13. 设$A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{2, 3\}$。验证

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)。$$

14. 证明　$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$。

15. (1) 求$(\{1, 2\} \times \{3, 4, 5, 6\}) \cap (\{1, 2\} \times \{6, 7, 8, 9, 10\})$;

(2) 求$(\{2, 4, 6, 7\} \times \{1, 3, 5, 7, 9\}) \cap (\{2, 4, 6, 7\} \times \{0, 2, 4, 6, 8\})$。

16. 设$X = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, $Y = \{y \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, $Z = \{z \mid 0 \leqslant z \leqslant 1\}$。指出$X \times Y \times Z$在普通的三维空间内是什么图形。

§2 等价关系，商集

怎样分类

有一群学生，怎样将他们分类呢？这要看用什么方法来分。譬如说，可以用“相同年龄”来分，凡是相同年龄的学生都分成一类，这就是一种分类法。现在，让我们把这一分类法仔细考察一下，“相同年龄”是这群学生内部的一个关系，在这群学生中，任何两个学生 a 和 b，都可以判明 a 和 b 之间或者有这个关系(即 a 和 b 有“相同年龄”)，或者没有这个关系(即 a 和 b 之间没有“相同年龄”)，二者必居其一也只居其一。

再仔细分析一下，这个关系还有以下三个特点：

(1) 每个学生 a，自己和自己有“相同年龄”，即 a 和 a 有这个关系。

(2) 如果 a 和 b 有“相同年龄”，那么 b 和 a 也有“相同年龄”，即如果 a 和 b 有这个关系，那么 b 和 a 也有这个关系。

(3) 如果 a 和 b 有“相同年龄”，b 又和 c 有“相同年龄”，那么 a 和 c 也必有“相同年龄”。即如果 a 和 b 有这个关系，b 又和 c 有这个关系，那么 a 和 c 也必有这个关系。

由这个关系，就可以把这群学生按年龄分成许多类。例如凡是 14 岁的都属同一类，我们把这一类记为 L_{14}；凡 15 岁的也属于同一类，记它为 L_{15}，等等。这样，我们就把这群学

生分为许多类 $L_{14}, L_{15}, L_{16}, \cdots\cdots$

我们还可以按其他方法来分类。例如"同一学校"就是这群学生内部的另一个关系。任何两个学生 a 和 b，都可以判明他们之间或者有这个关系(即 a 和 b 是"同一学校")，或者没有这个关系(即 a 和 b 不是"同一学校")。同样，这个关系也具有三个特点(和"相同年龄"的三个特点完全类似!)：

(1) 任何学生 a，自己和自己有这个关系。

(2) 如果 a 和 b 有这个关系，那么 b 和 a 也有这个关系。

(3) 如果 a 和 b 有这个关系，b 和 c 也有这个关系，那么 a 和 c 必有这个关系。

由这个关系就可以把这群学生按学校进行分类，凡是同一学校的学生都属于同一类。这样，就把这群学生按学校分为许多类。

初看起来，上面所说的这些话都很平淡无奇，然而，正是从这种人们常见的事实中，却抽象出现代数学中的一些非常重要的概念。

等 价 关 系

设 S 是一个抽象的集合。我们说它是抽象的，是指对其中的元素并不给出具体的规定，它可以是一群学生，也可以是一些数字，或者是其他什么。现在，在这个集合 S 内给出一个关系，记这个关系是 R*(例如当 S 是一群学生时，R 是"相同年龄"，或者 R 是"同一学校")。S 内的任何两个元素 x 和 y，

---

* 参见 §3 内《再谈什么叫做关系》。在那里，给出了"关系"的数学定义。

总可以判明 x 和 y 之间有这个关系或者没有这个关系。如果有这个关系，我们就记为 xRy。

如果这个关系 R 满足下面三条公理：

(i) 自反性：对 S 内的任何元素 x，有 xRx。用普通的语言来说：S 内的任何元素自己和自己有这个关系。

(ii) 对称性：对 S 中的两个元素 x 和 y，如果 xRy，则 yRx。用普通的语言来说：如果 x 和 y 有这个关系，那么 y 和 x 也有这个关系。

(iii) 传递性：对 S 中的三个元素 x, y, z，如果 xRy，yRz，则 xRz。用普通的语言来说：如果 x 和 y 有这个关系，y 又和 z 有这个关系，那么 x 必和 z 有这个关系。

我们就说满足这三条公理的关系 R 是集合 S 内的一个等价关系，并用记号～来代替 R。如果 $x \sim y$，我们就说 x 和 y 等价(由对称性，y 也和 x 等价)。这时上面所说的三条公理可以扼要的写为：(i)$x \sim x$，(ii)$x \sim y \Rightarrow y \sim x$，(iii)$x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$。等价关系是现代数学中的一个很重要的概念。

例 1 在前面所说的一群学生中，“相同年龄”就是一个等价关系，而“同一学校”也是一个等价关系。

例 2 设 Z 是整数集，对集中的任何两个整数 a 和 b，都能够判明，a 和 b “之差是偶数”这句话是对的还是不对的。或对或不对，两者只居其一。可见，“之差是偶数”是 Z 内的一个关系。如果 a 和 b 之差是偶数，我们就说 a 和 b 有这个关系。下面我们验证它还是一个等价关系。

(1) Z 内任何整数 a，由于 $a-a=0$ 是偶数，所以 a 和 a 有这个关系，这就验证了自反性成立。

(2) 如果 $a-b$ 是偶数，那么 $b-a$ 当然也是偶数，这就验证了对称性成立。

(3) 如果 $a-b$ 是偶数， $b-c$ 也是偶数， 那么 $a-c=(a-b)+(b-c)$ 仍旧是偶数，这就验证了传递性成立。

这样便证明了两数"之差是偶数"是 Z 内的一个等价关系。在这个等价关系之下，我们把 Z 中所有和 2 等价的整数归并为一类，记为 E，即：

$$E=\{n|n\sim 2, n\in Z\}。$$

再把所有和 1 等价的整数归并为另一类，记为 O，即：

$$O=\{n|n\sim 1, n\in Z\}。$$

不难知道，E 是全体偶数所组成的集合，O 是全体奇数所组成的集合。整数集 Z 中每一个元素必属于且只属于 E 和 O 中的一个，这样就把 Z 分解为两个集合 E 和 O。

例 3 设 $S=\{(x, y)|0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$。它是一个以 O, A, B, C 为顶点的正方形(图 10)。对 S 中的两点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，如果它们的横坐标相等，即 $x_1=x_2$，我们就说 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 之间有关系，并且预先把它记为 $(x_1, y_1)\sim(x_2, y_2)$，下面验证它确实是等价关系。

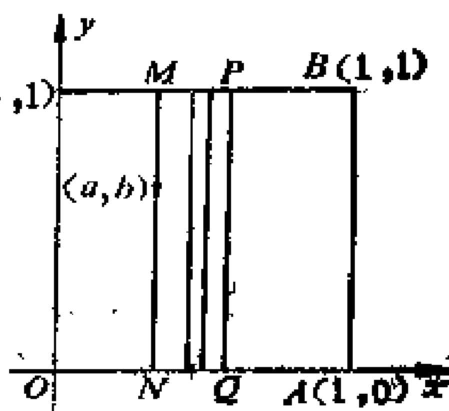


图 10

(i) 自反性：对任何 $(x, y)\in S$，显然有 $(x, y)\sim(x, y)$。

(ii) 对称性：若 $(x_1, y_1)\sim(x_2, y_2)$，这表明 $x_1=x_2$。于是也有 $(x_2, y_2)\sim(x_1, y_1)$。

(iii) 传递性：若 $(x_1, y_1)\sim(x_2, y_2)$，$(x_2, y_2)\sim(x_3, y_3)$，即

有 $x_1=x_2$, $x_2=x_3$, 立即知道 $x_1=x_3$, 这就是$(x_1, y_1)\sim(x_3, y_3)$。

这样便验证了$\sim$确实是 S 内的一个等价关系。

在 S 内固定一点(a, b)(图 10), 我们考察和(a, b)等价的点是些什么, 也就是考察集合

$$T_a=\{(x, y) \mid (x, y)\in S, (x, y)\sim(a, b)\}$$

是什么样子的。由本例中"$\sim$"的定义, 我们有

$$\begin{aligned} T_a&=\{(x, y) \mid (x, y)\in S, x=a\} \\ &=\{(a, y) \mid 0\leqslant y\leqslant 1\}, \end{aligned}$$

它就是图中的线段 MN。这是因为: (i) 在这个线段上的任何点(x, y)的横坐标 $x=a$, (ii)不在这个线段上的点的横坐标决不等于 a。由这两个理由便知道 $T_a=$线段 MN。

在这个等价关系之下, 就把整个正方形 $OABC$ 分解为无数多条垂直于 x 轴的线段, 如图中 MN, PQ, 等等。

例 4 设$M=\{(x, y) \mid -\infty<x<+\infty, \ -\infty<y<+\infty\}$, 它是整个平面。对$M$中的两点$(x_1, y_1)$, (x_2, y_2), 如果 $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$, 我们就说$(x_1, y_1)\sim(x_2, y_2)$, 不难验证$\sim$确实是M中的一个等价关系。在这一等价关系下, 凡与点(a, b)等价的点组成一个以原点为圆心, 以$\sqrt{a^2+b^2}$为半径的圆周。 这样就把整个平面分解为无数多个以原点为圆心的同心圆周。

并不是任何关系都是等价关系。例如在实数集内, "小于或等于"就是实数集内的一个关系, 任何两个实数 a 和 b 都可以明确判定, 或者 $a\leqslant b$, 或者不成立"$a\leqslant b$"。但"$\leqslant$"不是等价关系, 因为对不同的两个实数, 对称性不成立。

等 价 类

上面的四个例子告诉我们，在一个集合内，如果给定了一个等价关系，就可以按这个关系把集合分解为许多不同的类，我们称这些类是等价类。

一般说来，设S是一个抽象集，$\sim$是S内的一个等价关系，对S中的一个元素x，所有与x等价的元素所组成的集合，叫做由x产生的等价类，记为$[x]$，即：

$$[x]=\{y \mid y\in S, y\sim x\}。$$

例如在例2中，偶数集E就是由2产生的等价类，奇数集O是由1产生的等价类。

关于等价类，有以下几个性质：

(1) 如果u和v属于同一个等价类，那么$u\sim v$。

或者说，同一个等价类的任何两个元素必等价。

证明：设u和v都属于$[x]$，即有

$$u\sim x, \qquad v\sim x。$$

由对称性得$x\sim v$，再由传递性得$u\sim v$。

例如在例2中，偶数集E中任何两个偶数必等价，奇数集O中任何两个奇数也必等价。

(2) 如果u和v不等价，那么$[u]\cap[v]=\phi$。

或者说，两个不等价的元素所产生的等价类不相交。

证明：用反证法，假若$[u]\cap[v]\neq\phi$，那么必存在一个元素$x\in[u]\cap[v]$，这就是说：

$$x\in[u], \qquad x\in[v]。$$

由 $x\in[u]\Rightarrow x\sim u$，由 $x\in[v]\Rightarrow x\sim v\Rightarrow v\sim x$，再由传递性得 $v\sim u$，这和原先的假设（u 和 v 不等价）矛盾。

例如在例 2 中，1 和 2 不等价，所以 $O\cap E=\phi$。

(3) 如果 $u\sim v$，那么 $[u]=[v]$。

或者说，两个等价的元素所产生的等价类是相同的。

证明：我们先证明 $[u]\subset[v]$：设 $x\in[u]\Rightarrow x\sim u$，再由已知条件 $u\sim v$ 以及传递性得 $x\sim v$，即 $x\in[v]$。这样便证明了 $[u]\subset[v]$。

我们再用同样的方法证明 $[u]\supset[v]$。

这样便证明了 $[u]=[v]$。

例如在例 2 中，偶数集 E 是由 2 产生的，但也可以把它看成是由 4 产生的，或者由任何一个偶数产生的，同样，奇数集 O 也可以看成是由任何一个奇数产生的。

(4) 每一个元素 x 必属于一个等价类。

证明：由自反性 $x\sim x$，所以 x 必属于由它自己所产生的等价类 $[x]$。

由这些性质告诉我们，利用等价关系，就可以把集合 S 分解为许多不同的等价类：

$$[x],\ [y],\ [z],\ \cdots$$

S 中的每一个元素必属于且只属于一个等价类，同一个等价类里的元素之间互相等价，不同等价类的元素之间必不等价。

商 集

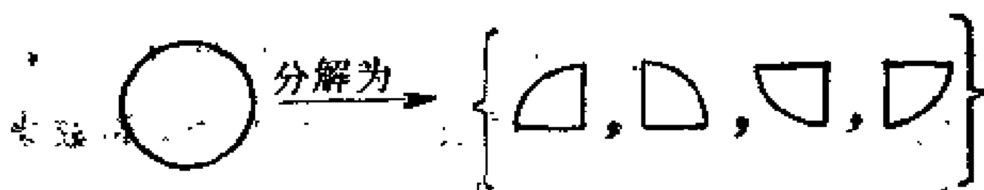
在算术中，“商”是和“除法”相联系的，例如分一块蛋糕，

把它等分为四份，我们可以用两种不同的观点来看这件事，一种是算术的观点，一种是集合的观点。

算术的观点：一块蛋糕等分成四份，每一份就是$\frac{1}{4}$，它是商。于是就有等式：

$$1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}。$$

集合的观点：一块蛋糕，设它是圆形的，等分成四份，这四份应该是“ ， ， ， ”，这也是一种“商”，于是有下列关系式：



现在，对于一个抽象的集合 S，我们把其中的一个等价关系记为 E（就是前面的～），再来分解这个集，不是用刀切，而是按等价关系将集合 S 分解为许多（有限或无限多个）等价类 $[x],[y],[z],\cdots$，如同分蛋糕一样，有：

$$S\xrightarrow{\text{分解为}}\{[x],[y],[z],\cdots\}$$

我们把每一个等价类看成一个整体，例如把 $[x]$ 看成是一个新的元素，把 $[y]$ 看成是另一个新的元素，…，由这些新元素所组成的集合叫做 S 的商集，记为 S/E。也就是说，

$$S/E=\{[x],[y],[z],\cdots\}。$$

例如在例 2 中，商集是 $\{E, O\}$，它由两个元素 E 和 O 组成，是一个有限集。

例 5　某市所有中学生成为一集 S，“同一学校”就是这

群学生之间的一个等价关系，记此关系为 E。那么商集 S/E 就是：

$$S/E=\{[\times\times\text{中学的学生}],[\times\times\text{中学的学生}],\cdots\}。$$

如果一共有 100 所中学，那么商集 S/E 也是一个有限集，它的元素共计 100 个。

例 6 设 $S=\{(x, y)|-\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty, x\neq 0, y\neq 0\}$。它是整个平面，但除掉坐标轴。对于 S 中的两点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，如果 $x_1x_2>0, y_1y_2>0$，我们就说 $(x_1, y_1)\sim(x_2, y_2)$，或者记为 $(x_1, y_1)E(x_2, y_2)$，可以验证 E 是 S 内的一个等价关系。我们记 A_1, A_2, A_3, A_4 分别是第一，二，三，四象限(图 11)，这时商集

$$S/E=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}。$$

它由 4 个元素组成。

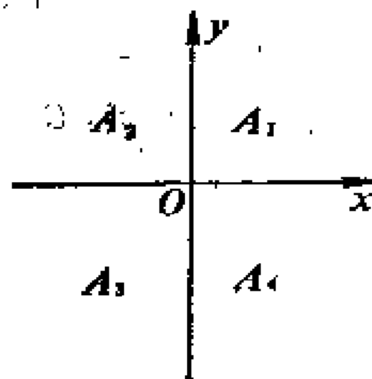


图 11

一个集合的商集也可能是无限集。例如在例 3 中，商集就是由所有 $T_a(0\leqslant a\leqslant 1)$ 所组成的，每一个 T_a 都是这个商集的元素，这一商集就是无限集。

概括起来说，在一个抽象集 X 内，如果给定了一个等价关系 E，就可以按这个关系 E 把集合 X 分解为许多(有限或无限多)等价类。X 中的每一个元素必属于且只属于一个等价类，同一等价类中的元素互相等价，不同等价类的元素必不等价。由所有等价类所组成的集合就是商集 X/E。

习　题

1．设 X 是除 0 以外的实数集。对 X 中的任何两个实数 x 和 y，如

果 $xy>0$，我们就说 xEy，验证 E 是 X 内的一个等价关系，并作出商集 X/E。

2．设 R 是实数集，记通常的"="是 R 内的一个关系 E。验证 E 是等价关系，并作出商集 R/E。

3．设 Z 是整数集，如果 Z 中的两个整数 a 和 b 之间有"$a-b$ 可以被 3 整除"，我们就说 aEb。验证 E 是 Z 内的一个等价关系，并作出商集 Z/E。

4．设 X 是整个平面除去 y 轴，如果其中两点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 有 $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$，并且 $x_1x_2>0$，我们就说 $(x_1, y_1)E(x_2, y_2)$。验证 E 是 X 内的一个等价关系，并作出商集 X/E。

5．设 R 是实数集。对任何实数 x，我们用 $[x]$ 表示 x 的最大整数部分，即小于或等于 x 的最大整数。例如 $[3.95]=3$，$[1.4]=1$，$[-2.51]=-3$，$[-3.01]=-4$，$[5]=5$。如果两个实数 x 和 y 满足 $[x]-[y]=0$，我们就说 xEy，验证 E 是 R 内的一个等价关系，并作出商集 R/E。

§3 顺序关系，半序集和全序集

顺序关系，半序集和全序集

在一个集合内，除了等价关系，还有一种重要的关系叫做顺序关系。什么是顺序关系呢？我们还是从实数谈起，在实数集R内，有一个大小顺序，例如$-5\leqslant-3$，$2\leqslant7$，但$4\not\leqslant1$等等，这个"$\leqslant$"就是R内的一个关系，对R内的任何两个实数a和b都可以判明它们有这个关系(即$a\leqslant b$)，还是没有这个关系(即$a\not\leqslant b$)。这个关系有下面三个特点：

(1) 任何实数a，有$a\leqslant a$。换句话说，a和a有这个关系，这和等价关系中的自反性一样。

(2) 如果$a\leqslant b$，并且$b\leqslant a$，那么必有$a=b$。换句话说，如果a和b有这个关系，而b和a也有这个关系，那么a和b必相等。这一条和等价关系中的对称性不同，我们叫它是反对称性。

(3) 如果$a\leqslant b$，$b\leqslant c$，那么必有$a\leqslant c$。换句话说，如果a和b有这个关系，b又和c有这个关系，那么a和c也必有这个关系。这又和等价关系中的传递性一样。

把这三条抽象出来，便得到集合内的顺序关系。

设X是一个集合，如果X内的一个关系R，它满足下面三条公理：

(1) 自反性：X 内的任何元素 x，有 xRx（即 x 自身和自身有这个关系）。

(2) 反对称性：若 xRy 并且 yRx，则 $x=y$（即，如果 x 和 y 有这个关系，y 又和 x 有这个关系，那么 x 和 y 必相同）。

(3) 传递性：若 xRy，yRz，则 xRz（即，如果 x 和 y 有这个关系，y 又和 z 有这个关系，那么 x 和 z 也必有这个关系）。

我们称满足这三条公理的关系是集合 X 内的一个**顺序关系**，并把它记为 $\prec$。如果 $x\prec y$，我们就说 y 在 x 的后面，或者说 x 在 y 的前面。但要注意的是，y 在 x 的后面这句话也包含着 x 和 y 相同。

在一个集合 X 内，如果给定了一个顺序关系 $\prec$，我们就说集合 X 按顺序 $\prec$ 成为一个半序集。又如果这个顺序关系还有一个性质：对 X 内任何两个元素 x 和 y，都可以确定它们当中哪一个在前，哪一个在后（即“$x\prec y$”和“$y\prec x$”中总有一个成立），这时我们就说 X 是**全序集**。全序集又叫做**链**。

例 1 实数集 R，有理数集 Q，整数集 Z，按关系 $\leqslant$（显然它是一个顺序关系）是全序集。

例 2 26 个英文字母所组成的集合 $E=\{a, b, c, d, \cdots, x, y, z\}$，$E$ 中的自然顺序（b 在 a 的后面，c 在 b 的后面，…，z 在 y 的后面）是一个顺序关系。并且对 E 中的任何两个字母，总可以确定哪个在前，哪个在后。因此，集合 E 按自然顺序是一个全序集。

例 3 查英汉词典，其中英文单词也有一个顺序，例如 *boy* 是在 *book* 的后面，*school* 是在 *man* 的后面，等等，这就是词典顺序。又因为对任何两个英文单词，总可以确定哪个

在前，哪个在后，所以由所有英文单词所组成的集合按词典顺序是一个全序集。

是不是所有的集合都是全序集呢？我们考察下面的例子。

例 4 设 τ 是由实数轴上所有开区间组成的集合。对其中两个开区间 O_1 和 O_2，如果 $O_1 \subset O_2$，我们就说 $O_1 \prec O_2$。容易验证，$\prec$ 是 τ 内的一个顺序关系。这时，τ 按关系 $\prec$ 就是一个半序集。现在问：它是不是全序集？我们说：不是。例如两个区间 $(0, 1)$ 和 $(2, 3)$，在它们之间既无 $(0, 1) \prec (2, 3)$，也无 $(2, 3) \prec (0, 1)$，因此这两个开区间谈不上哪个在前，哪个在后。这表示 τ 按顺序关系 $\prec$ 不是全序集。

再谈什么叫做关系

不论是等价关系还是顺序关系，它们首先是集合内的一个关系，其次它们还要满足某些公理。对于这些公理，我们已经讲了不少的话，但对于什么叫做关系，我们并没有给它一个明确的定义。回想一下，在上一节和这一节中，我们对集合内的关系 R 是这样叙述的：对集合 X 中的任何两个元素 a 和 b，都可以明确地判断 a 和 b 有这个关系还是没有这个关系，二者必居其一而且只居其一。这个说法只是一种直观的描述，还不是严格的数学定义。要给出它的严格的定义，必须借用 §1 中直积的概念。

设 X 是一个集合，再设 R 是直积 $R \times R$ 中的一个子集，对 X 中的任何两个元素 a 和 b，(a,b) 就是 $X \times X$ 的一个元素。

如果$(a,b)\in R$(即这个元素属于子集 R)，我们就说 a 和 b 之间有关系 R，记为 aRb，并把 R 叫做 X 内的一个关系。换句话说，X 内的一个关系就是直积 $X\times X$ 内的一个子集，对 X 中的任何两个元素 a 和 b，总可以判明(a,b)属于这个子集，还是不属于这个子集。如果(a,b)属于这个子集，就说 a 与 b 有这个关系，否则就是没有这个关系。

现在，我们用已经举过的例子来考察一下这个定义。

例如设 Z 是整数集，那么 $Z\times Z$ 的元素就是(m,n)，其中 m,n 都是整数。可见$(1,6)$，$(3,7)$，$(8,-4)$，$(9,2)$等都是 $Z\times Z$ 中的元素，在 $Z\times Z$ 中我们取一个子集 R，它是由这样的元素(m,n)所组成的：其中 $m-n$ 是偶数，即

$$R=\{(m,n)\mid(m,n)\in Z\times Z, m-n \text{ 是偶数}\}。$$

例如$(1,6)\notin R$，$(3,7)\in R$，$(8,-4)\in R$，$(9,2)\notin R$。这个 R 就是§2例2中的关系。

再如，仍旧设 Z 是整数集，在 $Z\times Z$ 中取一个子集 R，它是由这样的元素(m,n)组成：其中 $m\leqslant n$，即

$$R=\{(m,n)\mid(m,n)\in Z\times Z, m\leqslant n\}。$$

例如$(2,5)\in R$，$(4,1)\notin R$。这个 R 就是本节例1中的关系"$\leqslant$"。

再如，设 $S=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，那么

$$S\times S=\{((x_1,y_1),(x_2,y_2))\mid(x_1,y_1)\in S,(x_2,y_2)\in S\}。$$

取 $S\times S$ 中的一个子集

$$R=\{((x_1,y_1),(x_2,y_2))\mid((x_1,y_1),(x_2,y_2))\in S\times S, x_1=x_2\}。$$

这个 R 就是§2例3中的关系。

在一个集合中，除等价关系、顺序关系外，还有一些其他的关系，这里不介绍了。

习　　题

1. 设F是由所有在$[0, 1]$上有定义的初等函数组成的集合。如果F内的两个函数f_1和f_2有：对$[0, 1]$内的任何x，$f_1(x) \leq f_2(x)$成立；我们就说$f_1 \prec f_2$。验证$\prec$是顺序关系。并问F按$\prec$是半序集还是全序集？

2. 设Z^+是正整数集。如果集内的两个正整数m和n有"m可以被n整除"，我们就说$n \prec m$。验证$\prec$是Z^+内的顺序关系。并问Z^+是半序集还是全序集？

3. 设R^2是整个平面。对其中两点(x_1, y_1)和(x_2, y_2)，如果$x_1 < x_2$或者$x_1 = x_2$而$y_1 \leq y_2$，我们就说$(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$。验证$\prec$是$R^2$内的一个顺序关系。并问$R^2$是半序集还是全序集？

§4 映　　射

怎样把函数的概念加以拓广

对于通常的函数 $y=f(x)$，我们总是这样说的：设 X 和 Y 是两个集合，它们是由一些实数所组成的，如果对 X 中的任何一个实数 x，在已给定的法则 f 的作用下，总可以得到 Y 中的唯一一个实数 y，我们就说这个 y 和 x 对应，并把 y 记为 $f(x)$，即 $y=f(x)$。这时我们称 f 是 X 上的函数，$f(x)$ 是 f 在 x 点的值，并称 X 是函数 f 的定义域，记为 D_f。当 x 取遍 X 中的实数时，函数值 $f(x)$ 的全体也构成一个集合，我们称此集合是函数 f 的值域，记为 R_f，即

$$R_f=\{y \mid y=f(x), x\in X\}。$$

要注意的是：R_f 并不一定等于 Y，而是 $R_f\subset Y$。在具体的问题中，它们可能相等，但也可能 R_f 是 Y 的真子集。

例如 $y=f(x)=\sin x$，它的定义域 $D_f=(-\infty, +\infty)$，对 $(-\infty, +\infty)$ 内的任何 x，其函数值是 $\sin x$，它的值域 $R_f=[-1, 1]$。又如 $y=g(x)=\sqrt{x^2-1}$，它的定义域 $D_g=(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$，对 D_g 内的任何 x，其函数值是 $\sqrt{x^2-1}$，它的值域 $R_f=[0, +\infty)$。

现在，我们分析一下，在函数的概念里，有哪些事实还可以作进一步的拓广。

在函数的概念里，告诉了我们两件事：

(1) 通过 f 的作用，把 X 变到 Y 里面去；

(2) 每一个 $x\in X$，在 f 的作用下变成 $f(x)$。

把上面这两件事连起来写，就得到

$$f: X\to Y$$
$$x\longmapsto f(x)。$$

它表示有一个函数 f，它把 X 变到 Y 里面去；对每一个 $x\in X$，f 在 x 的值是 $f(x)$。这样，我们通常所熟习的函数，例如正弦函数 $y=\sin x$，就要写成下面的样子，这种写法对初学的人可能有些陌生，但多看看就熟习了。

$$f: R\to R\,(R\text{ 是实数集})$$
$$x\longmapsto \sin x。$$

这些记号的含意是：通过 f 的作用，把实数集 R 变到实数集 R 里去；对任何实数 x，f 在 x 的数值是 $\sin x$。

然而，在上面所说的概念中，还有一个很大的限制，即 X 和 Y 都是由一些实数所组成的集合。这个限制应不应该打破呢？能不能打破呢？如果能够打破，岂不是把通常的函数概念加以拓广了吗！

映射的概念

先考虑两个例子。

例 1 每一个三角形都有它的面积。我们设 T 是所有三角形所组成的集合，又设 R 是实数集合，那么，对 T 中的任何一个元素 t（它是三角形），通过"求面积"，在 R 中必有唯一的

一个实数 x 和它对应(即 $x=t$ 的面积)。我们把"求面积"用 f 来表示,并把上面的事情用记号写出来,就得到:

$$f: T \to R$$

$$t \longmapsto x = t \text{ 的面积。}$$

不难知道,f 的值域 $R_f=(0, +\infty)$。这个 f 和函数的概念多么相象啊!所不同的仅仅是 T 不是由某些实数所组成,而是由所有三角形所组成的。

例 2 一群学生构成一个集合 S,这群学生去检查发育状况,分三个等级:优,良,差。我们记 $M=\{$优,良,差$\}$,M 也是一个集合。现在,通过"检查",对 S 中的每一个学生 s,在 M 中必有一个且只有一个元素和这个 s 对应。我们把"检查"用 φ 来表示,那么,上面的事情就可以用记号写出来:

$$\varphi: S \to M$$

$$s \longmapsto s \text{ 的发育状况。}$$

例如张××$\longmapsto$良,王××$\longmapsto$优,等等。如果这群学生的发育状况都是优和良,那么,值域 $R_\varphi=\{$优,良$\}$。这又和函数的概念多么相象!所不同的只是 S 和 M 都不是由某些实数所组成的。

这就告诉我们,在通常的函数概念中,X 和 Y 都是由某些实数所组成的集合这一限制必须打破,而且也能够打破。这样就引进了映射的概念。

设 X 和 Y 是两个抽象的集合。如果对 X 内的每一个元素 x,在某个法则 T 的作用下,总有 Y 中的一个且只有一个 y 和这个 x 对应,我们就称 T 是 X 到 Y 的映射,并称 y 是 x 在映射 T 作用下的象(图 12),把它记为 $y=T(x)$ 或 $y=Tx$。又称 x 是

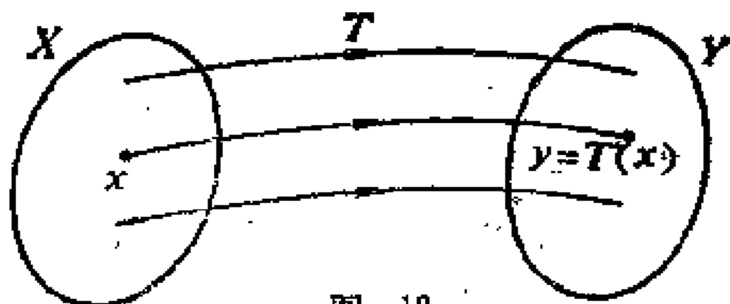


图 12

y 的一个**逆象**(或**原象**)。

用记号写出来就是:

$$T:X\to Y$$

$$x\longmapsto y=T(x)。$$

并称 X 是映射 T 的定义域，记为 D_T。由所有的象 $T(x)$ 所组成的集合称为 T 的值域，记为 R_T，即

$$R_T=\{y\mid y=T(x),x\in X\}。$$

可见，映射的概念完全是函数概念的拓广。例 1 和例 2 中的 f 和 φ 都是映射。

最后，还要注意两点：

(1) 值域 R_T 并不一定等于 Y，而是 $R_T\subset Y$。

(2) 对 X 中的每一个元素 x，通过 T 的作用，在 Y 中有一个象 y 与此 x 对应；但反过来，y 在 X 中的逆象可能不止一个，读者自己考察一下例 1 和例 2 就会明白的。

此外，两个映射 T_1 和 T_2，如果它们的定义域相同，并且对定义域内的任何元素 x，$T_1(x)=T_2(x)$，我们就说这两个映射相等，记为 $T_1=T_2$。

例 3 设 X 是所有三角形的集合，Y 是所有圆的集合，映射 φ 是：

$$\varphi: X\to Y$$

$$x \longmapsto x \text{ 的内切圆。}$$

这表示，映射φ把每一个三角形映射成它的内切圆。它的定义域$D_\varphi=X$，值域$R_\varphi=Y$。

例 4 设$C_{[-1,1]}$是由区间$[-1,1]$上所有连续函数所组成的集合，R是实数集。映射f是：

$$f: C_{[-1,1]} \to R$$
$$x \longmapsto x(0)。$$

这表示映射f把$[-1,1]$上的连续函数x映射成x在0点的数值$x(0)$。

现代数学中的许多重要概念都和映射密切相关。例如距离空间中的距离，赋范空间中的范数，线性空间中的矩阵，微分和积分（特别是抽象的微分和积分）等等都是映射。就拿积分来说吧，在现代的积分概念中，是把积分看作某个空间到实数内的满足一些公理的映射。所以映射的概念在现代数学中占有很重要的地位。

关于映射，还有下面的一些术语和概念。

设映射$f: X \to Y$。

(1) 如果f的值域$R_f=Y$。这意味着在f的作用下，把X变到整个Y上面去，我们就说**f是X到Y上**（注意这个"上"字）**的映射**。这时，Y中的任何元素，在X中必有逆象，但逆象可能不止一个。例3中的映射φ就是一个X到Y上的映射。

(2) 如果R_f是Y的一个真子集，我们就说**f是X到Y内**（注意这个"内"字）**的映射**。这时，Y中将存在这样的元素y，它在X中没有逆象（图13）。例1中的映射就是这种映射。

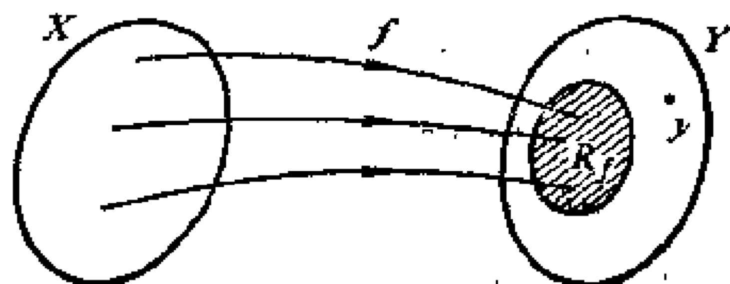


图 13

(3) 如果对X中的任何两个不同的x_1和x_2，它们的象y_1和y_2也不同，我们就说f是一个**一一映射**。这时，又有两种情况：

一种是$R_f=Y$，就说f是X到Y上的一一映射。

另一种是R_f是Y的真子集，就说f是X到Y内的一一映射。

前面所举的几个例子都不是一一映射，例如在例1中，两个不同的三角形可以有相同的面积，在例2中，两个学生可以有相同的发育状况。

例5 设A是某单位所有职工所组成的集合，在这个单位的医务室里，所有职工病历卡的号码也组成一个集合。我们记它是B。通过挂号(我们记"挂号"为φ)，就有

$$\varphi: A\to B$$

$$\text{职工}\longmapsto\text{病历卡号码。}$$

这个φ就是A到B上的一一映射，任何两个职工决不会有相同的病历卡号码。

例6 设$X=(-\infty, +\infty)$，$Y=\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，对通常的函数

$$y=\operatorname{arctg}x,$$

我们把它记为

$$f: X \to Y$$
$$x \longmapsto \operatorname{arctg} x。$$

这时，f 是 X 到 Y 上的一一映射。

如果在两个集合 A 和 B 之间，存在一个从 A 到 B 上的一一映射，我们就说这两个集合 A 和 B 一一对应。这意味着：(i) A 中的每一个元素，必有 B 中的唯一一个元素和它对应；(ii) A 中的不同元素，不会有 B 中的同一个元素和它们都对应；(iii) B 中的任何一个元素，在 A 中必有逆象；再由(ii)知道，这个逆象是唯一的。

例如在例 5 中，所有职工 A 和所有病历卡号码 B 一一对应。在例 6 中，$(-\infty, +\infty)$ 和 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 一一对应。

例7 设 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 是一个 n 次实系数多项式，这种 n 次多项式的全体组成一个集合，记它为 P_n。又设 R^{n+1} 是 $n+1$ 维欧氏空间，即

$$R^{n+1}=\underbrace{R\times R\times\cdots\times R}_{n+1\text{ 个}},$$

其中 R 是实数集。这就是说，R^{n+1} 中的点是用 $(x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 来表示的，其中 $x_i(i=0, 1, 2, \cdots, n)$ 是实数。

现在，在 P_n 和 R^{n+1} 之间建立一个映射：

$$\varphi: P_n \longrightarrow R^{n+1}$$
$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \longmapsto (a_0, a_1, \cdots, a_n)。$$

不难验证：(i)对每一个 n 次多项式 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，在 R^{n+1} 中只有一个点 $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ 和它对应，(ii)对不同的多

项式，在 R^{n+1} 中有不同的点分别和它们对应。(iii)R^{n+1} 中任何点 $(b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n)$，在 P_n 中也只有一个逆象 $b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n$。这样便验证了 φ 是 P_n 到 R^{n+1} 上的一一映射。于是，P_n 和 R^{n+1} 一一对应。这告诉我们，可以把 n 次多项式看成是 $n+1$ 维欧氏空间的一个点。

例 8 映射 $I_x: X \longrightarrow X$

$$x \longmapsto x。$$

这个映射把 X 中的任何 x，自己和自己对应起来，我们称这个映射是恒等映射。它显然是 X 到 X 上的一一映射。

复 合 映 射

设两个映射(图 14)：

$$f: A \longrightarrow B, \quad g: B \longrightarrow C。$$

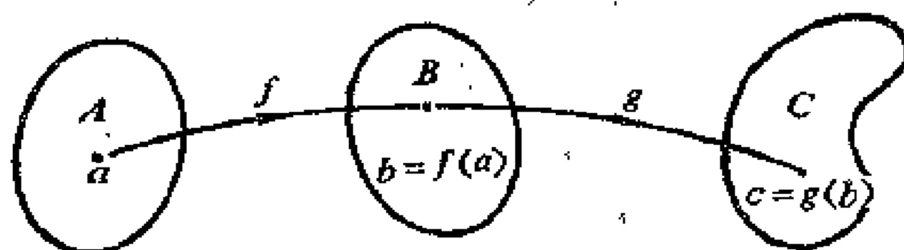


图 14

由第一个映射知道，对集合 A 中的任何一个元素 a，通过 f 的作用，在 B 中有一个象 b，即 $b=f(a)$。再由第二个映射知道，对这个 b，通过 g 的作用，在 C 中有一个象 c，即 $c=g(b)$。这样我们就得到

$$a \overset{f}{\longmapsto} b \overset{g}{\longmapsto} c。$$

或者说，对 A 中的任何元素 a，——经过中间元素 b，——总可

以得到C中的一个元素c与这个a对应，这样就获得了一个从A到C的新的映射φ，它先把A中的a变成B中的b($b=f(a)$)，再把B中的b变成C中的c($c=g(b)=g(f(a))$)。即：

$$a \overset{f}{\longmapsto} b=f(a) \overset{g}{\longmapsto} c=g(b)=g(f(a))$$
$$\underset{\varphi}{\longmapsto\cdots\cdots\cdots\longrightarrow}$$

我们把这个新映射φ记为$g\circ f$，并称它是f和g的**复合映射**。这样就有：

$$g\circ f: A\longrightarrow C$$
$$a\longmapsto g(f(a))。$$

例 9 设A是一切三角形所组成的集合，B是一切圆所组成的集合，C是实数集。又设

$$f: A\longrightarrow B$$
$$a\longmapsto a \text{ 的内切圆。}$$

(即在f的作用下，每一个三角形的象是它的内切圆。)

$$g: B\longrightarrow C$$
$$b\longmapsto b \text{ 的面积。}$$

(即在g的作用下，每一个圆的象是它的面积。)

那么复合映射

$$g\circ f: A\longrightarrow C$$
$$a\longmapsto a \text{ 的内切圆面积。}$$

(即在复合映射$g\circ f$的作用下，每一个三角形的象是它的内切圆的圆面积。)

例 10 到邮局去寄包裹，从上海寄到北京。设 X 是由所有包裹组成的集合，又设 Y 是正实数集，它表示重量，单位是克，再设 Z 也是正实数集，它表示价格，单位是元。设映射 φ_1 和 φ_2 如下：

$$\varphi_1(\text{秤包裹}): X \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto x\text{ 的重量。}$$

(即在 φ_1 作用下，每一个包裹的象是它的重量。)

$$\varphi_2(\text{付邮费}): Y \longrightarrow Z$$

$$y \longmapsto y\text{的邮费。}$$

(即在 φ_2 的作用下，y 克重的东西，它的象是 y 的邮费。)

那么，复合映射：

$$\varphi_2 \circ \varphi_1: X \longrightarrow Z$$

$$x \longmapsto x\text{ 的邮费。}$$

对寄包裹的人来说，每一个包裹都有相应的邮费，它实际上是一个复合映射，这是因为：对邮局的人来说，每一个包裹必须先经过秤重量，然后再经过按重量折算为邮费的复合过程。

例 11 通常的函数 $y=\sin u, u=1+x^2$，把这两个函数合并起来，就得到一个复合函数

$$y=\sin(1+x^2)\text{。}$$

用我们已经引进的记号写出来就是：

$$f: X \longrightarrow U \quad (X, U\text{ 都是实数集})$$

$$x \longmapsto 1+x^2\text{。}$$

$$g: U \longrightarrow Y \quad (Y\text{是实数集})$$

$$u \longmapsto \sin u,$$

那么

$$g\circ f: X\longrightarrow Y$$
$$x\longmapsto \sin(1+x^2)。$$

例12 设 X,U,V,Y 都是实数集，

$$f_1: X\longrightarrow U$$
$$x\longmapsto e^x,$$
$$f_2: U\longrightarrow V$$
$$u\longmapsto \sqrt{1+u},$$
$$f_3: V\longrightarrow Y$$
$$v\longmapsto \cos v。$$

那么

$$f_3\circ f_2\circ f_1: X\longrightarrow Y$$
$$x\longmapsto \cos\sqrt{1+e^x}。$$

这就是通常的复合函数

$$y=\cos\sqrt{1+e^x},$$

它是由 $y=\cos v$, $v=\sqrt{1+u}$, $u=e^x$ 复合而成的。

逆 映 射

先考察一个例子。在例5中，我们设某单位的所有职工组成一个集合 A，又设这些职工的病历卡号码组成另一个集合 B，通过挂号（即映射 φ）：

$$\varphi: A\longrightarrow B$$
$$a\longmapsto a\text{ 的病历卡号码。}$$

φ 是 A 到 B 上的一一映射。这表明：

（i）对每一个职工，只有一张病历卡和他对应；

（ii）反过来，对每一张病历卡，只有一个职工和这张卡对应。这样一来，我们就得到一个从 B 到 A 上的映射，把它记为 φ^{-1}，即

$$\varphi^{-1}: B \longrightarrow A$$

$$\text{病历卡号码} \longmapsto \text{一个职工},$$

我们就说 φ^{-1} 是 φ 的逆映射。当然，φ 也是 φ^{-1} 的逆映射，或者说 φ 和 φ^{-1} 互为逆映射。

一般地，设映射 $f: X \to Y$，是 X 到 Y 内（或上）的一一映射，它的定义域是 $D_f = X$，它的值域是 R_f。既然 f 是一一映射，这就告诉我们，对 R_f 内的任何一个元素 y，在 X 内有一个且只有一个逆象 x。换句话说，对 R_f 内的 y，在 X 内有唯一一个 x 和这个 y 对应。这样，我们便得到一个从 R_f 到 X 上的映射，把它记为 f^{-1}，并称它是 f 的逆映射（图 15）。

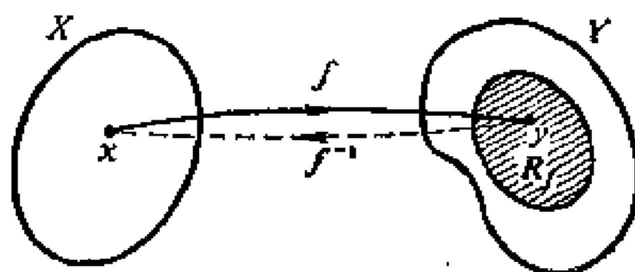


图 15

f^{-1} 的定义域是 R_f，值域是 X，它正好和 f 的定义域 X、值域 R_f 互相颠倒。并且 f 和 f^{-1} 互为逆映射。

把上面的事情用记号写出来就是：

设 $$f: X \longrightarrow R_f$$

$$x \longmapsto y$$

是 X 到 R_f 上的一一映射，那么 f 的逆映射 f^{-1} 是：

$$f^{-1}: R_f \longrightarrow X$$
$$y \longmapsto x,$$

它是 R_f 到 X 上的一一映射。

例 13 设 $X=\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $Y=[-1,1]$,

$$f: X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto \sin x。$$

这就是通常的函数 $y=\sin x$, 它是 X 到 Y 上的一一映射。它的逆映射是:

$$f^{-1}: Y \longrightarrow X$$
$$y \longmapsto \arcsin y,$$

这就是 $y=\sin x$ 的反函数 $x=\arcsin y$。

例 14 设 $X=(-\infty, 0]$, $Y=[0, +\infty)$

$$f: X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto x^2,$$

那么

$$f^{-1}: Y \longrightarrow X$$
$$y \longmapsto -\sqrt{y}。$$

这就是通常的函数 $y=f(x)=x^2$ 和它的反函数 $x=f^{-1}(y)=-\sqrt{y}$。(其中规定 $x \leqslant 0$。)

由映射产生的等价关系

设 X, Y 是两个集合, f 是 X 到 Y 的映射:

$$f: X \longrightarrow Y。$$

对X中的两个元素x_1和x_2，如果$f(x_1)=f(x_2)$(即x_1和x_2在Y中有相同的象)，我们就说$x_1\sim x_2$(图16)。

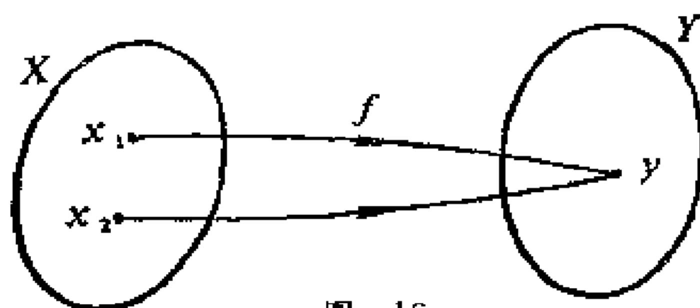


图 16

现在，我们验证～确实是X内的等价关系。

(i) 对X内的任何x，由于$f(x)=f(x)$，所以$x\sim x$。(自反性成立)

(ii) 如果$x_1\sim x_2$，即$f(x_1)=f(x_2)$，可见$x_2\sim x_1$。(对称性成立)

(iii) 如果$x_1\sim x_2$，$x_2\sim x_3$，这表示$f(x_1)=f(x_2)$，$f(x_2)=f(x_3)$，于是$f(x_1)=f(x_3)$，即$x_1\sim x_3$。(传递性成立)

这个等价关系就是由映射f所产生的，在这一等价关系下，可以作出x的等价类$[x]$：

$$[x]=\{y\,|\,f(y)=f(x),\ y\in X\}。$$

从而作出X的商集X/E(这里用E表示～)：

$$X/E=\{[x],[y],[z],\cdots\}。$$

如图17，把X分解为许多类$[x]\cdots$，每一类中的所有元素，通

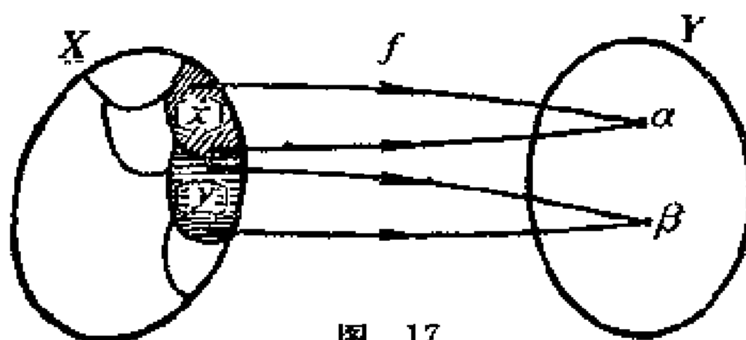


图 17

过 f 都变成 Y 中的同一个元素。

例 15 设 $X=[0,\pi]$, $Y=[0,1]$,

$$f: X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto \sin x。$$

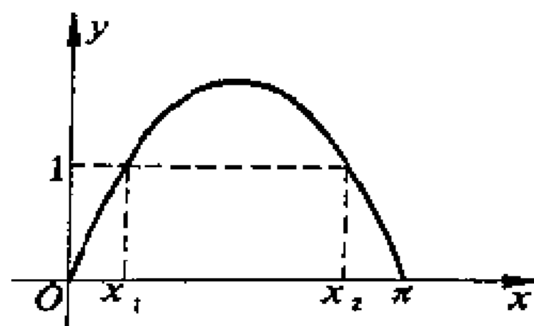


图 18

对 X 中的两个实数, x_1 和 x_2, 如果 $\sin x_1=\sin x_2$ (图 18), 我们就说 $x_1 E x_2$, 容易知道, E 是 X 内的一个等价关系。在这个等价关系之下, π 的等价类 $[\pi]$ 是

$$[\pi]=\{x \mid \sin x=\sin \pi=0, x\in[0,\pi]\}$$
$$=\{0,\pi\}。$$

$\frac{\pi}{4}$ 的等价类 $\left[\frac{\pi}{4}\right]$ 是

$$\left[\frac{\pi}{4}\right]=\left\{x \mid \sin x=\sin \frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ x\in[0,\pi]\right\}$$
$$=\left\{\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right\}。$$

同样可得:

$$\left[\frac{\pi}{3}\right]=\left\{x \mid \sin x=\sin \frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ x\in[0,\pi]\right\}$$
$$=\left\{\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\right\}。$$

$$\left[\frac{\pi}{2}\right]=\left\{x \mid \sin x=\sin \frac{\pi}{2}=1,\ x\in[0,\pi]\right\}$$
$$=\left\{\frac{\pi}{2}\right\}。$$

一般地, 对任何 $x\in[0,\pi]$, 它的等价类 $[x]$ 是:

$$[x]=\{x, \pi-x\},$$

而商集 X/E 就是由这些$[x]$所组成的。

例16 在例 2 中，S 是由一群学生所组成的集合，$M=\{$优，良，差$\}$，映射f(它表示检查发育状况)：$S\to M$。对 S 中的两个学生 s_1 和 s_2，如果 $f(s_1)=f(s_2)$，(即 s_1 和 s_2 的发育状况相同)，我们就说 s_1Es_2。不难知道，E 是 S 内的一个等价关系。这时，

$$S/E=\{S_1, S_2, S_3\}。$$

其中 S_1, S_2, S_3 分别是由所有发育状况是优、良、差的学生所组成的集合。

习 题

1. 指出下列映射 f: $X\to Y$ 是 X 到 Y 上的还是 X 到 Y 内的映射？是不是一一映射？

(1) X是由某中学所有学生所组成的集合，Y是实数集，

f: $x\mapsto x$的年龄。

(2) X与(1)相同，Y是该中学所有学号所组成的集合，

f: $x\mapsto x$的学号。

(3) X是由所有椭圆所组成的集合，Y是正实数集，

f: $x\mapsto x$的面积。

(4) X和Y都是实数集，f: $x\mapsto x^3$。

(5) X和Y都与(4)相同，f: $x\mapsto x^4$。

(6) X和Y都是非负实数集，f: $x\mapsto x^4$。

(7) X和Y都是实数集，f: $x\mapsto \operatorname{arc\,tg} x$。

(8) X是由 x 轴上所有闭区间所组成的集合，Y是由圆心在 x 轴的所有圆周组成的集合，f: $x\mapsto$以 x 为直径的圆。

2. 在上一题中，哪些映射 f 存在逆映射 f^{-1}？把逆映射 f^{-1} 写

出来。

3. 设X和Y是两个集合，$B\subset A\subset X$。举例说明，存在映射$f:X\to Y$，使得

$$f(A-B)\neq f(A)-f(B)$$

这里$f(A)=\{y|y=f(x),x\in A\}$（即当x取遍A中的一切元素时，由$f(x)$所组成的集合就是$f(A)$）。同样，$f(B)=\{y|y=f(x),\ x\in B\}$，$f(A-B)=\{y|y=f(x),x\in A-B\}$。

再证明，当f是一一映射时，$f(A-B)=f(A)-f(B)$。

4. 设映射$f:\ X\to Y$。证明下面两个条件等价（即由其中任何一个可以推出另外一个）：

(1) f是X到Y的一一映射；

(2) 对X中任何两个子集A和B，如果A和B不相交，那么$f(A)\cap f(B)=\phi$。

5. 设$f:X\to Y$是X到Y上的一一映射，f^{-1}是它的逆映射。问：复合映射$f^{-1}\circ f$和$f\circ f^{-1}$是什么？

6. 设X和Y是实数集，$f:X\to Y$，$x\mapsto x^2$。如果X内的两个实数x_1和x_2有$x_1^2=x_2^2$，就说x_1Ex_2。验证E是X内的一个等价关系，并求出商集X/E。

§5 集合的势，可列集和不可列集

谁多谁少？

两个班级，学生的人数谁多谁少是很容易知道的。两个抽象的集合，如果它们都是有限集，其中的元素哪个多，哪个少，也是很容易知道的。但是，如果这两个集合都是无限集，怎样比较它们的元素谁多谁少呢？例如，

自然数集 $N=\{1,2,3,\cdots\}$，

正的偶数集 $E^+=\{2,4,6,\cdots\}$，

整数集 $Z=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，

实数集 $R=\{x|-\infty<x<+\infty\}=(-\infty,+\infty)$。

哪个元素“多”，哪个元素“少”呢？粗一看，似乎 E^+ 中元素最少，N 比 E^+ 多，Z 又比 N 多，R 最多。其实并不全如此，事实上，N，E^+，Z 这三个集的元素却是一样“多”！而 R 却比它们多得多。这个结论是怎样来的呢？让我们先考察一下，两个有限集是如何比较多少的。

设两个班级，一个是 A，另一个是 B，要比较这两个班级的学生哪班多哪班少，可采用两种办法。

办法一，报数。报完以后看谁的数目大，数目大的就表示这个班上的学生多。但这种办法对无限集却行不通。

办法二，配对子。将 A 中的一个学生 a_1 和 B 中的一个学

生 b 配成一对，配好以后，不准他们再和别人配对了，然后再把 A 中的另一个学生 a_2 和 B 中的另一个学生 b_2 配成一对，同样，配好以后也不准他们再和其他人配对了。这样，一对一对地配下去，如果 A 中的人都配完了，而 B 中还剩下一些人，我们自然就说 B 中的学生比 A 多。如果 A 和 B 中的学生正好都能一对一的搭配起来，我们就说 A 和 B 的学生人数一样多。这种"配对子"的方法却可以应用到无限集中去。

集 合 的 势

设 A 和 B 是两个集合，如果 A 和 B 可以一一对应(即存在一个从 A 到 B 上的一一映射)，这就意味着 A 的元素和 B 的元素可以全部一对一地配成对子。从直观上看，这表示 A 和 B 的元素个数一样多，但这句话还很不确切，因为在无限集的情形下，谈不上其中元素个数是多少。在集合论中，如果 A 和 B 一一对应，我们不说它们的元素个数相同，而是说 A 和 B 有相同的势。

在有限集的情形下，集合的势就是集内元素的个数，例如，设 $A=\{*, \circ, \triangle\}$，$B=\{a, b, c\}$，我们可以作出这两个集之间的一一对应如下(记号"$\leftrightarrow$"表示它的左、右两端的元素互相对应)：

$$*\longleftrightarrow a,\quad \circ\longleftrightarrow b,\quad \triangle\longleftrightarrow c。$$

可见 A 和 B 的势相同，我们就说它们的势是 3，而集合 $c=\{-1, 0, 1\}$ 的势也是 3。再如 $M=\{0\}$，$N=\{x\}$，它们的势相同，都是 1。

在无限集的情形下，应该怎样表达它的势呢？

可列集和可列势

设N是自然数集，$N=\{1,2,3,\cdots\}$。又设S是一个抽象的集。如果S能够和N一一对应，我们就说S和N同势，它们的势叫做**可列势**，记为$\aleph_0$(读作：阿列夫，零)，这时，又称S是**可列集**。很明显，N当然也是可列集。

例1 正的偶数集$E^+=\{2,4,6,\cdots\}$的势是什么？如果不加思索的话，一定会回答说，由于E^+的元素只有N中的"一半"，因此E^+的势大概也是可列势的一半吧！如果这样回答那就错了。下面我们证明，E^+是可列集，它的势和N一样，是$\aleph_0$。

证明：我们将E^+和N用下面的方法对应起来：

$$
\begin{array}{lcccccc}
N: & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
E^+: & 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n & \cdots
\end{array}
$$

这种对应是一一对应，于是E^+与N同势，它的势是$\aleph_0$。

同样可以证明，正奇数集$O^+=\{1,3,5,\cdots\}$也是可列集，它的势是$\aleph_0$。

这个例子告诉我们，虽然E^+是N的一个部分，$E^+\subset N$，并且E^+是N的真子集，但它们两者同势。直观上说，它们的元素个数一样多，这正是有限和无限之间的一个根本性的差别。

从这个例子还可以引出一个有趣的数学故事。

有一家旅馆，里面有100个客房，每个客房只能住一个人，如果已经住满了100个人，现在又来了一个旅客，这就没

有办法安排了。但如果这家旅馆的客房有无限多个，它的客房号码可以用自然数一个个的标出来，即用 1 号，2号，3号，…标出来，所有自然数无一遗漏，又如果每间客房都住满了一人，现在又来了一个旅客，是不是也没有办法安排呢？不，聪明的经理会重新安排客房，他请住在 1 号的旅客搬到 2 号去住，请 2 号的旅客搬到 3 号去住，…，请 n 号的旅客搬到 $n+1$ 号去住，…，原先的旅客都搬好了，没有一个会被遗留下来，这时，1 号房就空出来了，正好让新来的旅客住。不久，又来了一批旅客，他们的人数和自然数一样多，聪明的经理还是有办法的，他请 1 号的旅客搬到 2 号去，请 2 号的旅客搬到 4 号去，请 3 号的旅客搬到 6 号去，…，请 n 号的旅客搬到 $2n$ 号去，…，原先的旅客也可以安排妥当。这时，就把所有奇数号码的房间空出来了，让给新来的旅客住，因为所有奇数所成的集和自然数集同势，所以这批新来的旅客都住得进去。

例 2　设 $Z=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$，它是整数集，我们可以把它和 N 一一对应起来，对应的方法如下：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
N: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\
Z: & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \cdots & n & -n & \cdots
\end{array}
$$

这样便得到 Z 也是可列集，它的势是 $\aleph_0$。

例 3　设 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}$，

$$B=\{b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n,\cdots\}。$$

通过如下的一一对应：

$$a_n\longleftrightarrow n,\quad b_n\longleftrightarrow n,\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

立即知道 A 和 B 都是可列集，势是 $\aleph_0$。

再作 $C=\{a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,\cdots,a_n,b_n,\cdots\}=A\cup B$，通过

一一对应：

$$a_n \longleftrightarrow 2n-1, \quad b_n \longleftrightarrow 2n, \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

同样立即知道，C 也是可列集。这时，虽然$C=A\cup B$，但 C 与 A、B 同势。

这三个例子告诉我们，凡可列集，其中元素总是可以一个接着一个排列起来，但不一定是按大小次序排列。例如可以把整数集 Z 中的元素排列为 $0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\cdots,n,\ -n,\cdots$，但它不是按大小次序来排列的，这就是可列集这一名称的含义。

例 4 设 Q 是有理数集，则 Q 是可列的。（或者直观地说，所有有理数和自然数一样多，这是很令人惊奇的！）

证明：我们先证明所有非负的有理数所组成的集合 Q^+ 是可列的，为了这个目的，我们只要把 Q^+ 中的元素一个一个的排列出来就可以了（当然无法按大小次序来排列）。

我们列出下面的非负有理数表，请暂时不要去管记号↙表示什么，待表列好以后就会解释的。并且在下面的表中，凡已经出现过的数，接下去就不再把它列出来。

非负整数：	0	1	2	3	4	$\cdots$
	↙	↙	↙	↙		
分母是 2 的正有理数：	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\cdots$
	↙	↙	↙			
分母是 3 的正有理数：	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\cdots$
	↙	↙				
分母是 4 的正有理数：	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\cdots$
	↙					
分母是 5 的正有理数：	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\cdots$

……

这样便把所有非负的有理数全部列在表中了。接下去，我们按照↙的顺序把这些数排列起来：

$$0,1,\frac{1}{2},2,\frac{3}{2},\frac{1}{3},3,\frac{5}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},4,\frac{7}{2},\cdots$$

到此便证明了 Q^+ 是可列的，我们可以把 Q^+ 写为：

$$Q^+=\{r_1,r_2,r_3,\cdots,r_n,\cdots\}。$$

再用同样的方法可以证明所有负的有理数集 Q^- 也是一个可列集，我们可以把它写为：

$$Q^-=\{s_1,s_2,s_3,\cdots,s_n,\cdots\}。$$

根据例 3，得

$$Q=Q^-\cup Q^-$$

也是可列的。

可列集具有以下几个性质：

(1) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都是可列集，那么

$$S=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

也是可列集，或者说，有限个可列集的和集仍旧是可列集。

这个性质的证明和例 3 差不多。

(2) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是一列可列集，这里的 A_n 一共有无限多个，但由于 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 是可以排列的，我们就说这种无限是可列无限。作它们的和集

$$\begin{aligned}S&=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\\&=\{x\mid 至少有一个自然数\ j，使得\ x\in A_j\}，\end{aligned}$$

则 S 也是可列集。或者说，可列无限多个可列集之和集仍旧

是可列集。

这个性质的证明思想已经含在例 4 中，有兴趣的读者可以自己去完成它的证明。

(3) 设 S 是可列集，那么直积 $S\times S$ 也是可列集。

证明：由于 S 是可列集，我们可以把它的元素全部排列出来：

$$S=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots\}。$$

根据直积的定义有：

$$\begin{aligned}S\times S&=\{(x,x')\mid x\in S,x'\in S\}\\&=\{(x_i,x_j)\mid i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots\}。\end{aligned}$$

现在，我们把 $S\times S$ 中的元素全部写出来：

$$\begin{array}{llllll}(x_1,x_1), & (x_1,x_2), & (x_1,x_3), & \cdots, & (x_1,x_n), & \cdots\\(x_2,x_1), & (x_2,x_2), & (x_2,x_3), & \cdots, & (x_2,x_n), & \cdots\\(x_3,x_1), & (x_3,x_2), & (x_3,x_3), & \cdots, & (x_3,x_n), & \cdots\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{array}$$

再利用例 4 的办法，就把 $S\times S$ 中的元素一个跟着一个的排列出来了，这就证明了 $S\times S$ 是可列集。

利用这个性质可以知道，若 S 是可列集，那么

$$S^n=\underbrace{S\times S\times\cdots\times S}_{n\text{个}}$$

也是可列集。

是不是所有的无限集都是可列集呢？回答是否定的。

不 可 列 集

例 5 区间 $[0,1]$ 内的所有实数是不可列的。

证明：采用反证法。

假设[0,1]内的实数是可列的，我们把它列为：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

于是[0,1]内的所有实数都在 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ 里了。下面，我们用小数把这些 x_i 表示出来：

$$x_1 = 0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}a_3^{(1)}a_4^{(1)}\cdots,$$
$$x_2 = 0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}a_3^{(2)}a_4^{(2)}\cdots,$$
$$x_3 = 0.a_1^{(3)}a_2^{(3)}a_3^{(3)}a_4^{(3)}\cdots,$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n = 0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}a_3^{(n)}a_4^{(n)}\cdots,$$
$$\cdots\cdots$$

其中 $a_j^{(i)}$ 是 0 和 9 之间的一个整数。由于这样的表示对某些小数来说，其形式并不是唯一的，例如 0.250000…，也可以表示为 0.249999…，这时我们就约定，遇到这种情形我们只把它表示为 0.250000…。又如 0.1470000…，不把它表示为 0.1469999…，这样就保证了表示的唯一性。

现在，作一个 x：

$$x = 0.b_1b_2b_3b_4\cdots,$$

要求 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n, \cdots$ 满足下列条件：

(1) 它们都是 0 和 9 之间的整数。

(2) 对每一个 n，$b_n \neq a_n^{(n)}$。具体的说：

$$b_1 \neq a_1^{(1)}, b_2 \neq a_2^{(2)}, b_3 \neq a_3^{(3)}, \cdots$$

(3) 选好某些 b_i 之后，例如选好 $b_1, b_2, \cdots, b_k$ 之后，其余的 b_n 不可以全都选为 9，这就是说，避免发生下列情形：

$$x = 0.b_1b_2\cdots b_k9999\cdots$$

这三个要求是办得到的。作出了这样的 x 之后，由(1)知道 x 是[0, 1]内的一个实数，由(2)和(3)又知道：

因为 $b_1 \neq a_1^{(1)}$，所以 $x \neq x_1$，

因为 $b_2 \neq a_2^{(2)}$，所以 $x \neq x_2$，

……

因为 $b_n \neq a_n^{(n)}$，所以 $x \neq x_n$，

……

一句话，x 不在 $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$ 里面，这和假设[0, 1]内的所有实数都在 $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$ 里矛盾。这样便证明了[0, 1]内所有实数所组成的集是不可列集。

由势的概念知道，凡和区间[0, 1]一一对应的集，应该有相同的势，我们称这个势是连续势，记为 $\aleph$（读作：阿列夫）。

例 6　任何闭区间 $[a, b]$ 的势是 $\aleph$。

证明：我们作 [0, 1] 和 $[a, b]$ 的一一对应如下：对任何 $x \in [0, 1]$，

$$x \longleftrightarrow (b-a)x + a \in [a, b]。$$

例如 $x=0$ 对应 $[a, b]$ 中的 a，$x=1$ 对应 $[a, b]$ 中的 b，$x=\frac{1}{2}$ 对应 $[a, b]$ 中的 $\frac{a+b}{2}$。很容易验证这个对应是一一对应。这样便证明了 $[a, b]$ 和 [0, 1] 同势，势为 $\aleph$。

在集合论中，关于集合的势有一个重要的性质：

性质：设 A 是一个有限集或可列集，B 是一个无限集，那么

$$(A \cup B) \text{的势} = B \text{的势}。$$

直观的说，对一个无限集而言，再加上一个有限集或可列集，对它的势没有影响。

这里，我们略去它的证明。

例 7　任何有限的开区间(a,b)的势是$\aleph$。

证明：因为

$$[a,b]=(a,b)\cup\{a,b\},$$

由上面的性质（这里设$\{a,b\}=A,(a,b)=B$）：

$$\begin{aligned}(a,b)\text{的势}&=(a,b)\cup\{a,b\}\text{的势}\\&=[a,b]\text{的势}。\end{aligned}$$

所以(a,b)的势是$\aleph$。

例 8　实数集 $R=(-\infty,+\infty)$的势是$\aleph$。

证明：由例 7 知$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$的势是$\aleph$。

现在，我们作一个从$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$到$(-\infty,+\infty)$上的映射：

$$\varphi:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\longrightarrow(-\infty,+\infty)。$$

$$x\longmapsto \operatorname{tg}x。$$

这个映射是一一的，于是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$和$(-\infty,+\infty)$一一对应，这样便证明了$(-\infty,+\infty)$的势与$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$的势相同，势是$\aleph$。

例 9　设S是由所有无理数所组成的集，则S的势是$\aleph$。

证明：设Q是由所有有理数所组成的集，它的势是$\aleph_0$。由于

$$S\cup Q=R\text{(实数集)},$$

而R的势是$\aleph$，利用上面的性质，即得S的势是$\aleph$。

这个例子告诉我们，无理数比有理数多得多。

下面再举一个有名的例子。

例10 设$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$是一个代数方程，它的系数$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$都是整数。这样的方程称为**整系数代数方程**，它的实根（如果存在的话）叫做**代数数**。例如$\sqrt{2}$就是一个代数数，因为它是整系数代数方程$x^2-2=0$的一个实根。又如$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$也是一个代数数，因为它是整系数代数方程$x^2-x-1=0$的一个实根。

一个实数α，如果它不是代数数，我们就称它是超越数。例如，圆周率π、自然对数的底e都是超越数。

设M是由一切代数数所组成的集合，N是由一切超越数所组成的集合。显然有

$$M\cup N=R\text{(实数集)}, M\cap N=\phi。$$

现在，我们要问：M的势和N的势分别是什么？

让我们一步一步地分析。

(1) 当方程式的次数n固定时，设Q_n是由所有n次整系数方程所组成的集合。又设$Z=\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$是整数集。作$Z$的直积$Z^{n+1}=\underbrace{Z\times Z\times\cdots\times Z}_{n+1}$，$Z^{n+1}$中的元素是$(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n)$，其中$a_0, a_1, \cdots, a_n$都是整数。现在，我们将$Q_n$和$Z^{n+1}$一一对应起来，对应的方法是：

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\longleftrightarrow(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n)。$$

于是 Q_n 与 Z^{n+1} 同势。

Z 是可列集，再由可列集性质(3)，所以 Z^{n+1} 也是可列集。这样便得到 Q_n 是可列集。

(2) 当 $n=1,2,3,\cdots$，时，我们得到 $Q_1,Q_2,Q_3,\cdots$，作

$$Q=\bigcup_{n=1}^{\infty}Q_n,$$

Q 就是一切整系数方程所组成的集合。由于每一个 Q_n 是一个可列集，由可列集性质(2)，得 Q 也是可列集。

(3) 对每一个整系数方程，它的实根只有有限多个，也可能根本没有。如今，已经证明了所有整系数方程所组成的集合 Q 是可列的，我们把 Q 中的元素列出来：

$$q_1,q_2,q_3,\cdots,q_n,\cdots$$

设 q_1 的实根是 $\alpha_1^{(1)},\alpha_2^{(1)},\alpha_3^{(1)},\cdots,\alpha_s^{(1)}$，$q_2$ 的实根是 $\alpha_1^{(2)},\alpha_2^{(2)},\alpha_3^{(2)},\cdots,\alpha_t^{(2)}$，等等，每一个方程的实根都是有限个。然后按 $q_1,q_2,q_3,\cdots,q_n,\cdots$ 的排列次序把这些实根嵌进去，排成：

$$\overbrace{\alpha_1^{(1)},\alpha_2^{(1)},\alpha_3^{(1)},\cdots,\alpha_s^{(1)}}^{q_1\text{的实根}},\ \overbrace{\alpha_1^{(2)},\alpha_2^{(2)},\cdots,\alpha_t^{(2)}}^{q_2\text{的实根}},$$

$$\overbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots}^{q_3\text{的实根}},\ \cdots\cdots,$$

这样就把所有整系数代数方程的实根一个跟着一个的排列出来了。到此便证明了由所有代数数所组成的集合 M 的势是 $\aleph_0$。

(4) 因为 M 的势是 $\aleph_0$，而 $M\cup N=R$，R 的势是 $\aleph$，所以

$$N\text{ 的势}=(M\cup N)\text{的势}=\aleph。$$

这个例子表明，超越数比代数数多得多。在集合论创立之前，曾经有不少数学家相当费力地证明超越数的存在，集合论问世以后，不仅证明了超越数的存在，还证明了超越数比代数数多得多。

有没有比$\aleph$还要大的势呢？深究一下，这里有两个问题：

(1) 什么是势的大小？

(2) 有没有最大的势？

在这里，我们不去深入讨论它们，只是介绍一下。

(1) 两个集合A和B

(i) 如果A和B一一对应，我们已经知道，这时A的势等于B的势。

(ii) 如果A和C(C是B的真子集)一一对应，而A和B不一一对应，我们就说A的势小于B的势，或者说B的势大于A的势。例如有限集的势总小于有理数集的势，有理数集的势又小于实数集的势，即

$$n<\aleph_0<\aleph。$$

(2) 没有最大的势。在集合论中可以证明，对任何一个集合S，总可以构造出一个新的集合S'，使得S的势小于S'的势。这就表明不存在最大的势。

再谈集合的和与交

在集合的运算中，我们曾经研究过有限个集合的和与交，在可列集中，又引进了可列无限多个集合的和与交，现在，我们要引进任意多个集合的和与交。

设Λ是一个指标集，如果它是一个有限集，我们可以不妨假定它的元素是 $1,2,3,\cdots,n$。如果Λ是一个可列集，我们就假定它的元素是 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$。除了这两种以外，Λ还可能是不可列集。

我们用记号$\{A_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$表示一族集合，其中每一个 A_λ 都是集合。如果Λ是有限集，那么这个记号就是$\{A_i,i=1,2,\cdots,n\}$，它表示这一族集合实际上是 $A_1,A_2,\cdots,A_n$。如果Λ是可列集，这个记号就是$\{A_i,i=1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$，它表示这一族集合实际上是 A_1，$A_2,A_3,\cdots,A_n,\cdots$，一共有可列无限多个。如果$\Lambda$不是可列集，那么在这一族$\{A_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$中有不可列无限多个集合。

例如对 $\lambda>0$，设 $A_\lambda=\{(x,y)\mid x^2+y^2=\lambda^2\}$。它是以原点为圆心，以 λ 为半径的圆周。再设 $\Lambda=\{\lambda\mid 0<\lambda<+\infty\}$，它是一个不可列集，那么$\{A_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$就是这样的一族集合，它包括了所有以原点为圆心的圆周。这些圆周有不可列无限多个。

现在，我们定义一族集合$\{A_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$的和与交，并用记号$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$和$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$来表示它们的和与交，它们的定义是

$$\text{和：}\quad \bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{x\mid \text{至少存在一个 }\lambda_0\in\Lambda,x\in A_{\lambda_0}\},$$

这就是说，和的元素一定在某个 A_{λ_0} 中。

$$\text{交：}\quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{x\mid \text{对一切 }\lambda\in\Lambda,x\in A_\lambda\},$$

这就是说，交的元素一定在每一个 A_λ 中。

例 11　设$R^2=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}$，它是整个平面。又设

$$\Lambda = \{\lambda \mid 0 \leqslant \lambda < +\infty\},$$
$$A_\lambda = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = \lambda^2\},$$

那么

$$R^2 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda。$$

即：整个平面可以看成是所有以原点为圆心的一族同心圆周之和。

有限多个集合的和与交的许多法则和公式，都可以推广到任意个集合的和与交上去，例如同样有分配律：

$$B \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (B \cap A_\lambda),$$
$$B \cup \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (B \cup A_\lambda)。$$

以及有关余集的和交关系：

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c,$$
$$\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c。$$

它们的证明完全和有限个的情形一样，这里不重复了。

习　题

1. 下列集合 A 的势是什么？

   (1) $A = \{0\}$；

   (2) $A = \{a, b, c\}$；

   (3) $A = \{(p, q) \mid p, q$ 都是整数$\}$；

   (4) $A = \{(p, q) \mid p, q$ 都是有理数$\}$；

   (5) A 是由所有半径是 1、圆心在 x 轴上的圆周所组成的集合；

(6) A是由实数轴上所有两两不相交的有限开区间组成的集合；

(7) A是由所有圆心在原点的圆周所组成的集合；

(8) A是由所有圆心在原点，以正有理数为半径的圆周所组成的集合。

2. 证明：有限集与可列集的和集仍为可列集。

3. 证明：可列无限多个可列集的和集仍为可列集。

4. 设$\{A_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$是一族集合，$\Lambda$是指标集。证明：

(1) $B\cap(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(B\cap A_\lambda)$；

(2) $(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^c=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c$。

附录：罗素悖理

集合论作为纯粹数学的一个分支是近一百年来的事，它的创始人是德国著名的数学家康托尔(1845—1918)。1874年他发表了一篇《关于实代数数所组成的集合的一个性质》的论文，可以说是研究现代集合论的第一篇论文。然而，究竟什么是集合，虽然在我们的日常生活和工作中，集合的概念是不言自明的，但如何给它一个科学的定义，这却是一个困难的问题。早在一百年前，康托尔本人就知道这一点，曾经有一些数学家举了不少例子，说明凭借直观经验建立起来的集合的概念很有问题。在这些例子中，一个很有名的例子是英国哲学家和数学家罗素(1872—1970)所给出的，在集合论中被命名为罗素悖(读作：bèi)理。

理发师的头谁剃?

现在我们先讲一个有趣的问题，它与数学无关，但它的思想结构却和罗素悖理有相似之处。这里不妨用它做引子。

一个村子有一个理发师。在这个村子里订了一条不可违背的法律：凡是自己不替自己剃头的人必须由这个理发师去剃。现在要问：这个理发师的头由谁去剃?从逻辑上讲，只有两种可能性，理发师的头由别人剃，或者由自己剃。现在深入分析一下：

如果是第一种可能性，理发师的头由别人剃，这意味着理发师自己不替自己剃，按照法律，他的头就应该由理发师剃，这和第一种可能性矛盾。

如果是第二种可能性，理发师的头由自己剃，换句话说，这个头是由理发师剃的，按照法律，这个人自己不替自己剃头，这又和第二种可能性矛盾。

这样一来，便产生了一个悖理，理发师的头由谁剃呢?由别人剃，不行，由自己剃，也不行，真是左右为难了。同样，直观的集合概念也会产生这种左右为难的事情。

罗 素 悖 理

罗素举了这样一个例子。

把所有的集合分成两类：对一个集合 A，如果 $A\in A$（即 A 本身是 A 的一个元素），我们就说 A 是第一类的集合；凡不是第一类的集合，就说它是第二类的集合。

现在，我们设 Q 是由所有第二类的集合所组成的集合，即

$$Q=\{A|A\notin A\}。$$

用通常的话来说就是：Q 是由具有性质"$A\notin A$"的那些集合 A 所组成的。我们要问：Q 是第一类的还是第二类的？从逻辑上讲，回答这个问题只有两种可能性：Q 是第一类的，或者 Q 是第二类的。

如果 Q 是第一类的集合，即 $Q\in Q$，但由于 Q 中的任何元素 A 都具有性质"$A\notin A$"。而如今 Q 是 Q 中的元素，亦必有"$Q\notin Q$"这一性质。这就和 Q 是第一类的集合矛盾。

如果 Q 是第二类的集合，即 $Q\notin Q$，但由于凡具有性质"$A\notin A$"的集合都属于 Q，如今 $Q\notin Q$，这表明 Q 不具有"$Q\in Q$"的性质，故 Q 应该属于 Q，这又和 Q 是第二类的集合矛盾。

这真是左右为难，出了悖理。

集合论出了毛病，数学的基础也就发生了动摇。为了医治这个毛病，在现代的数学中就导致了集合论中公理系统的承认问题。目前，出现了两个学派，各有各的看法，也各有各的道理。谁是谁非，谁好谁差，目前并无定论，正象数学的其他所有分支一样，还有不少重大的课题正待人们去发现和研究。

习题解答

§1　集合的概念和集合的运算

1. (1) $X=\{0,5,-5,10,-10,15,-15,20,-20\}$.

(2) $X=(2,6)$,

(3) $X=\{3,4,5\}$,　　(4) $X=(3,4]$,

(5) $X=\phi$.　　(6)

(7)

2.

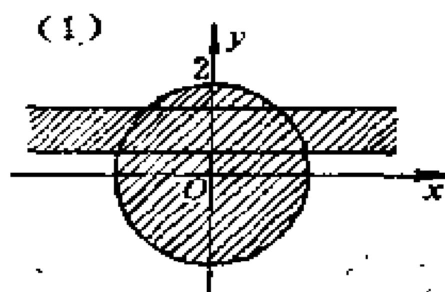
(1)　(2)　(3)　(4)　(5)　(6)　(7)　(8)

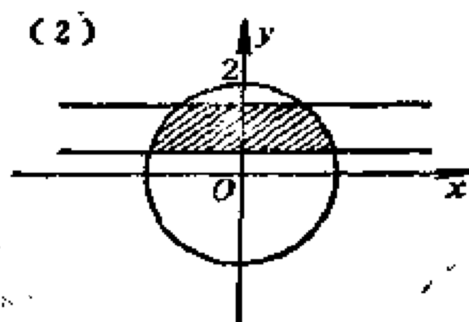
3．（1）正确，　　（2）不正确，　　（3）正确，

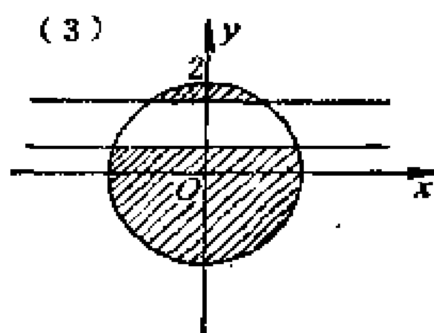
（4）不正确，　　（5）不正确，　　（6）正确，

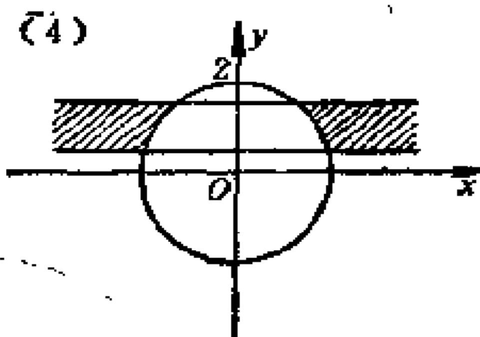
（7）正确，　　（8）正确，　　（9）不正确．

4．









6．$A\cap B=\phi$．

7．（1）ϕ, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{0, 3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$．

（2）ϕ．

8．证明：(i) 设 $x\in A\cap(B\cup C)\Rightarrow x\in A,\ x\in B\cup C$

$\Rightarrow x\in A,\ x\in B$ 或 $x\in A,\ x\in C$

$\Rightarrow x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$

$\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

得　$A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$．

(ii) 设 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$\Rightarrow x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$．

若　$x\in A\cap B\Rightarrow x\in A,\ x\in B$

$\Rightarrow x\in A,\ x\in B\cup C$

$\Rightarrow x\in A\cap(B\cup C)$，

若 $x\in A\cap C\Rightarrow x\in A,\ x\in C$

$\Rightarrow x\in A,\ x\in B\cup C$

$\Rightarrow x\in A\cap(B\cup C)$,

得 $A\cap(B\cup C)\supset(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

由 (i)与(ii)，即得证明.

10. 证明：(i) 设 $x\in\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)^c\Rightarrow x\in X,\ x\notin\bigcap_{i=1}^{n}A_i$

$\Rightarrow x\in X$, 存在某 j, $(1\leqslant j\leqslant n)$, $x\notin A_j$

$\Rightarrow x\in A_j^c$

$\Rightarrow x\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i^c$,

得
$$\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)^c\subset\bigcup_{i=1}^{n}A_i^c.$$

(ii) 设 $x\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i^c\Rightarrow$ 存在某 j, $(1\leqslant j\leqslant n)$, $x\in A_j^c$

$\Rightarrow x\in X,\ x\notin A_j$

$\Rightarrow x\in X,\ x\notin\bigcap_{i=1}^{n}A_i$

$\Rightarrow x\in\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)^c$,

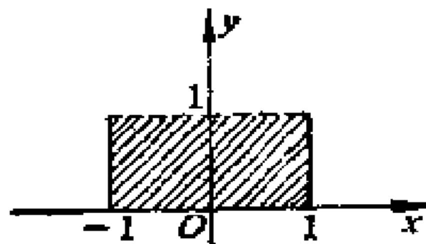
得
$$\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)^c\supset\bigcup_{i=1}^{n}A_i^c.$$

由(i)与(ii)，便得证明.

11. $A\times B\times C=\{(0,a,*),(0,a,\Delta),(0,b,*),(0,b,\Delta),$
$(1,a,*),(1,a,\Delta),(1,b,*),(1,b,\Delta)\}$.

$C\times B\times A=\{(*,a,0),(*,a,1),(*,b,0),(*,b,1),\ (\Delta,a,0),$
$(\Delta,a,1),\ (\Delta,b,0),(\Delta,b,1)\}$.

12. 如右图.



14. 证明：(i)设 $(x,y)\in A\times(B\cup C)$

$\Rightarrow x\in A,\ y\in B\cup C$

$\Rightarrow x\in A,\ \ y\in B$ 或 $x\in A, y\in C$

$\Rightarrow (x,y)\in A\times B$ 或 $(x,y)\in A\times C$

$\Rightarrow (x,y)\in (A\times B)\cup(A\times C)$,

得 $\quad A\times(B\cup C)\subset(A\times B)\cup(A\times C)$.

(ii) 设 $(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$

$\Rightarrow (x,y)\in A\times B$ 或 $(x,y)\in A\times C$

$\Rightarrow x\in A,\ \ y\in B$ 或 $x\in A,\ \ y\in C$

$\Rightarrow x\in A,\ \ y\in B\cup C$

$\Rightarrow (x,y)\in A\times(B\cup C)$,

得 $\quad A\times(B\cup C)\supset(A\times B)\cup(A\times C)$.

由(i)和(ii),便得证明.

15. (1) 利用直积的分配律,得$\{(1,6),(2,6)\}$.

(2) 利用直积的分配律,得 ϕ.

16. 是立方体,它的 8 个顶点是$(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$.

§2 等价关系,商集

1. $X/E=\{X^+,X^-\}$, X^+是正实数集, X^-是负实数集.

2. $R/E=R$,即等价类$[x]=\{x\}$.

3. $Z/E=\{[0],[1],[2]\}$.

$[0]=\{\cdots,-6,-3,0,3,6,9,\cdots\}$,

$[1]=\{\cdots,-8,-5,-2,1,4,7,\cdots\}$,

$[2]=\{\cdots,-4,-1,2,5,8,\cdots\}$.

4. X/E 是由原点射出的所有不与 y 轴重合的半射线组成. 每一个等价类就是一条半射线.

5. $R/E=\{\cdots,R_{-1},R_0,R_1,R_2,\ \cdots\}$, 其中 R_i 都是区间,例如 $R_{-1}=[-1,0)$, $R_0=[0,1)$, $R_1=[1,2)$, $R_2=[2,3)$等等.

§3 顺序关系，半序集和全序集

1. 是半序集.

2. 是半序集.

3. 是全序集.

§4 映 射

1. (1) X到Y内的，非一一的映射，

   (2) X到Y上的一一映射，

   (3) X到Y上的，非一一的映射，

   (4) X到Y上的一一映射，

   (5) X到Y内的，非一一的映射，

   (6) X到Y上的一一映射，

   (7) X到Y内的一一映射，

   (8) X到Y上的一一映射.

2. (2) f^{-1}: 学号$\mapsto$带有这一学号的学生，

   (4) f^{-1}: $y\mapsto\sqrt[3]{y}$，

   (6) f^{-1}: $y\mapsto\sqrt[4]{y}$，

   (7) f^{-1}: $y\mapsto\mathrm{tg}\, y$, 定义域是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，

   (8) f^{-1}: $y\mapsto x$ 轴被圆周 y 所截下来的闭区间.

3. 证明：(i) 若 $f(x_0)\in f(A-B)$，又因为 f 是一一映射

   $\Rightarrow$存在唯一的一个 $x_0\in A-B$，使 $f(x_0)\in f(A-B)$

   $\Rightarrow x_0\in A,\ x_0\notin B,\ f(x_0)\in f(A-B)$.

由 $x_0\in A$ 得 $f(x_0)\in f(A)$，由 $x_0\notin B$ 以及 f 是一一映射，得 $f(x_0)\notin f(B)$，这样便得到 $f(x_0)\in f(A)-f(B)$.

证明了 $f(A-B)\subset f(A)-f(B)$.

(ii) 设 $f(x_0)\in f(A)-f(B)\Rightarrow f(x_0)\in f(A)$，$f(x_0)\notin f(B)$，又由于 f 是一一映射$\Rightarrow$存在唯一的 x_0，$x_0\in A,\ x_0\notin B$

$\Rightarrow x_0 \in A-B \Rightarrow f(x_0) \in f(A-B)$.

这样便证明了 $f(A-B) \supset f(A)-f(B)$.

由(i)和(ii)便证明了结论.

4. 证明: 先证明由(1)可以推出(2). 用反证法, 假设 $f(A) \cap f(B)$ 不空, 则存在 $f(x_0) \in f(A) \cap f(B)$, 即 $f(x_0) \in f(A)$, $f(x_0) \in f(B)$. 由于 f 是一一映射, 于是 $x_0 \in A$, $x_0 \in B$, 得 $x_0 \in A \cap B$, 这和 A, B 不相交矛盾.

再证明由(2)可以推出(1). 也用反证法, 假设 f 不是一一映射, 则在X中有两个不同的元素 x_1 和 x_2, 它们的象 $f(x_1)=f(x_2)$. 但 $\{x_1\}$ 和 $\{x_2\}$ 是X中的两个不相交的子集. 按条件 $f(\{x_1\}) \cap f(\{x_1\})=\phi$. 这和 $f(x_1)=f(x_2)$ 矛盾.

5. $f^{-1}\circ f$ 是X到X上的恒等映射. $f\circ f^{-1}$ 是Y到Y上的恒等映射.

6. $X/E=\{\cdots[x]\cdots\}$, 其中等价类 $[0]=\{0\}$, $[x]=\{-x, x\}$ $(x \neq 0)$.

§5 集合的势, 可列集和不可列集

1. (1) 1, (2) 3, (3) $\aleph_0$, (4) $\aleph_0$,

(5) $\aleph$, (6) $\aleph_0$, (7) $\aleph$, (8) $\aleph_0$.

2. 证明: 设有限集为 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, 可列集为 $\{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$. 那么, 其和为 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k, b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$ 仍为可列集.

3. 证明: 设第一个可列集的元素是 $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, a_4^{(1)}, \cdots$

第二个可列集的元素是 $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, a_4^{(2)}, \cdots$

第三个可列集的元素是 $a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, a_4^{(4)}, \cdots$

……

再按↙的顺序将它们排列出来, 便证明了结论.

4. 证明的方法与有限个集合时完全一样.